XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

11 класс

11.1. Сколькими способами можно раскрасить в красный, синий и зелёный цвета вершины указанного на рисунке графа таким образом, чтобы всякие две вершины, соединённые ребром, имели различные цвета? (Всего 2024 треугольника и 1012 квадратов)

11.2. В клетки таблицы 3×3 вписаны цифры $1,2,3,4,5,6,7,8,9$, каждая по одному разу. В этой таблице можно прочесть три трёхзначных числа, читая слева направо, и ещё три трёхзначных числа, читая сверху вниз. Может ли оказаться так, что эти 6 чисел в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию?

11.3. Докажите, что для всех чисел x, y, где $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, выполнено неравенство

$$\cos x - \cos y < \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

11.4. Дан квадрат $ABCD$ и точка E, не лежащая в плоскости квадрата, такая, что ABE — равносторонний треугольник. Высоты треугольника CDE пересекаются в точке H. Докажите, что треугольник ABH — равносторонний.

11.5. Пусть $N \geqslant 4$ — натуральное число. Число $S(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ назовём *приближением* числа $\sqrt{N}$, если x, y — натуральные числа, а разность $\sqrt{N} - S(x,y)$ неотрицательна. Среди всех приближений $\sqrt{N}$ назовём *наилучшим приближением* то, при котором разность $\sqrt{N} - S(x,y)$ минимальна. Наилучшее приближение $\sqrt{N}$ обозначим за S_N. Например,

$$S_5 = \sqrt{1} + \sqrt{1},$$

$$S_6 = \sqrt{1} + \sqrt{2},$$

$$S_{15} = \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

а) Докажите, что $\sqrt{N} \geqslant S_N > \sqrt{N} - 1$. (2 балла)

б) Пусть $N = 2k$ — чётное число. Найдите наилучшее приближение $S(x,y)$ числа $\sqrt{N}$ при ограничении $x + y = k$. (4 балла)

в) Докажите, если $N = 2k$, где k — нечётное простое число, то $S_N \neq \sqrt{N}$. (3 балла)

г) Докажите, что при простом нечётном k полученное в пункте (b) приближение на самом деле является S_N (даже без ограничений на сумму $x + y$). (5 баллов)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

10 класс

10.1. Клуб "Медитация морем" собрал 27 роликов шума прибоя длительностью 1, 2, ..., 27 часов. Ролики были с архипелагов: Галапагосы, Занзибар и Кергелен. Средняя продолжительность ролика с Галапагосов — 3 часа, с Кергелен — 18 часов, а с Занзибара — 15 часов. Сколько роликов с каждого архипелага оказалось в распоряжении клуба "Медитация морем"? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

10.2. Чапаев написал многочлен 2024 степени и Петька написал многочлен 2024 степени. Потом каждый из них возвел свой многочлен в квадрат, после чего эти квадраты вычли один из другого. Получился ненулевой многочлен. Верно ли, что его степень хотя бы 2024?

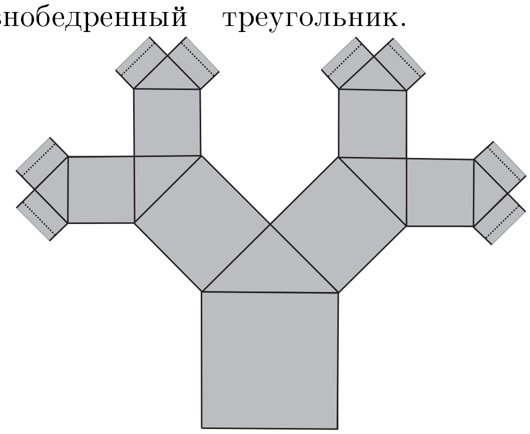
10.3. В начале игры "Стол Короля Артура" в зале находятся 100 рыцарей и 500 лжецов, а на сцене — двое ведущих и круглый стол на 13 персон. Каждый ведущий в свой ход выбирает свободное место и приглашает на него зрителя из зала. После того как все 13 мест за столом заняты, все сидящие кричат фразу «И рыцарь, и лжец — мой сосед», если, конечно, могут это сделать (рыцари всегда правдивы, лжецы – наоборот, а ведущие знают всех). Если фразу прокричат нечётное число сидящих за столом, выигрывает первый ведущий, а если чётное – второй. Кто из ведущих может выиграть независимо от игры соперника?

10.4. Билл Кайфер собрался нарисовать равносторонний треугольник на бумаге в клеточку. Помогите ему, для чего при любых действительных ненулевых a и b решите систему

$$a^2 + y^2 = b^2 + z^2 = (a-b)^2 + (y-z)^2,$$

то есть выразите y и z через a и b и докажите, что других решений нет.

10.5. Зенон нарисовал квадрат со стороной 1, затем, на одной из его сторон, как на гипотенузе, построил прямоугольный равнобедренный треугольник. На каждом последующем шаге, на всех катетах вновь полученных равнобедренных прямоугольных треугольников он строил по еще одному квадрату, у каждого из которых, на противоположной стороне, как на гипотенузе, рисовал новый равнобедренный прямоугольный треугольник. После того, как эта процедура была повторена бесконечное число раз, он получил узор Φ (на рисунке справа нарисована лишь часть узора).



а) Можно ли совершить бесконечное число оборотов, пройдя по линиям узора Φ маршрут конечной длины? (2 балла)

б) Можно ли из любой точки узора Φ в любую другую его точку проложить проходящий по линиям узора маршрут длины не больше 100? (4 балла)

в) Если закрасить в узоре Φ все построенные квадраты и равнобедренные прямоугольные треугольники, то конечна ли закрашенная площадь? (2 балла)

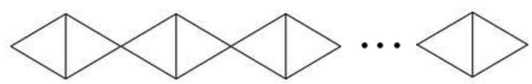
г) Конечна ли суммарная длина всех линий узора Φ? (6 баллов)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

9 класс

9.1. Сколькими способами можно раскрасить в красный, синий и зелёный цвета вершины указанного на рисунке графа таким образом, чтобы всякие две вершины, соединённые ребром, имели различные цвета? (Всего 2024 треугольника)



9.2. Сначала на доске было написано одно натуральное число $X < 2024$. Паша несколько раз проделывал следующую операцию: стирал с доски одно из имеющихся там чисел (назовём его A), а вместо него выписывал на доску два других числа: $2 \cdot A$ и $3 \cdot A$. Когда Паша закончил свои операции, сумма всех оставшихся на доске чисел равнялась 2024. Найдите все возможные значения X. Приводить примеры действий Паши не нужно.

9.3. Действительные числа a, b, c таковы, что $a^2bc + ab^2c + abc^2 = 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{bc}\right)^2 - 1.$$

9.4. Точка K – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, точка M – середина стороны BC. На отрезке AB нашлась точка P такая, что $\angle BKP = \angle PBM$ и $\angle PMB = \angle PBK$. Докажите, что $AB = 3AC$.

9.5. В каждую клетку доски $n \times m$ положили по одной монете. Монету, лежащую орлом вверх, разрешено забрать; при этом все монеты, лежащие в соседней по стороне клетке с забираемой, переворачиваются. Если действуя таким образом, возможно забрать все монеты с доски, раскладка монет называется *разрешимой*. Изначально орлом вверх лежит k монет.

а) Докажите, что если $m = 1$ и k нечётное, то раскладка разрешима; (3 балла)

б) Докажите, что если числа m и k нечётные, то раскладка разрешима; (4 баллов)

в) Докажите, что если раскладка разрешима, то число $nm + n + m + k$ чётное; (5 баллов)

г) Обязательно ли раскладка разрешима, если число $nm + n + m + k$ чётное? (2 балла)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

8 класс

8.1. Заряда аккумулятора хватит, чтобы одна лампа горела ровно один час. К аккумулятору подключено 5 ламп, у каждой лампы есть свой выключатель. Если горит несколько ламп, то заряд распределяется между ними равномерно. Если лампа горела непрерывно в течение 10 минут, она начинает мигать. Как только заряд аккумулятора заканчивается, все лампы отключаются. Как отмерить ровно 22 минуты?

8.2. Максим загадал натуральное число n, сложил все натуральные числа от n до $n+10$ и получил число M. Антон взял эти же самые натуральные числа, перемножил их и получил число A. Оказалось, что последние четыре цифры M совпадают с последними четырьмя цифрами A. Какими могут быть эти четыре цифры? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

8.3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведена высота CH. M – точка пересечения CH и биссектрисы угла BAC. Точка K на отрезке BH такова, что $MK \perp AM$ и $HK : BK = 1 : 8$. Найдите острые углы треугольника ABC.

8.4. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c таких, что число

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}+\frac{1}{c+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}}$$

является целым.

8.5. Некоторый алфавит состоит из n букв. Строку S, составленную из букв этого алфавита, будем называть *универсальной*, если вычёркиванием букв из S можно получить любую перестановку алфавита. Какова наименьшая возможная длина универсальной строки, если:

а) $n = 2$; (1 балл)

б) $n = 3$? (3 балла)

Существует ли для $n = 4$ универсальная строка длины:

в) 11; (5 баллов)

г) 12; (3 балла)

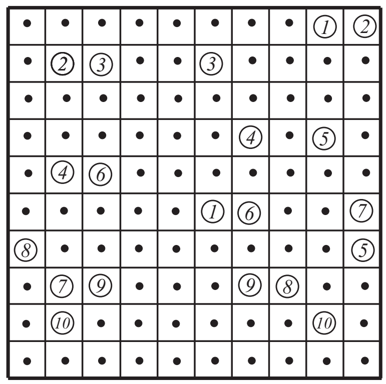
д) 13? (2 балла)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

7 класс

7.1. Соедините центры кругов с одинаковыми номерами (см. рисунок) десятью замкнутыми непересекающимися ломаными (каждая ломаная соединяет центры ровно двух кругов) так, что все звенья каждой ломаной параллельны сторонам квадрата, а концы звеньев лежат в отмеченных на рисунке точках — серединах соответствующих клеток.



7.2. Докажите, что число

$$256^2 + 253 \cdot 254 \cdot 258 \cdot 259$$

является квадратом натурального числа.

7.3. Расстояние между городами равно 2024 км. Путешественник преодолел это расстояние на велосипеде, проезжая каждый день целое число километров, не меньшее 70, но не большее 80. При этом в каждый чётный день пути он проезжал одинаковое расстояние; в каждый нечётный — тоже одинаковое, но другое. Сколько километров проезжал путешественник в чётный и сколько в нечётный день? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

7.4. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойством: вычеркнув некоторые его цифры (все, кроме двух) можно получить любое наперёд заданное двузначное число. Ответ обоснуйте.

7.5. Имеется 14 пробирок с кислотой; в первой ровно 1 мл, во второй — 2 мл в третьей — 3 мл и так до последней, в которой 14 мл кислоты. Также имеется пустая склянка ёмкостью 100 мл. Старший и младший лаборанты (старший начинает) по очереди выливают кислоту из пробирок в склянку; каждый в свой ход полностью опорожняет одну выбранную им пробирку (любую из ещё не опустевших). Тот из лаборантов, после хода которого склянка переполнится, берёт на себя ответственность за пролитую кислоту и будет делать уборку в лаборатории; разумеется, ни тот, ни другой лаборанты этого не хотят. Кто, старший или младший лаборант, может избежать участи уборщика, как бы его коллега этому не препятствовал? Ответ обоснуйте.

7.6. На сторонах AB и DA квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки P и M так, что $BP = AM$. Докажите, что $2PM \geqslant AC$.

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

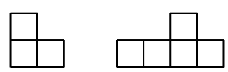
6 класс

6.1. Маша и Даша получили в столовой кашу. Если забрать у Маши треть всей её каши и выдать Даше треть всей её каши, то у девочек будет поровну каши. Во сколько раз Маша получила больше каши, чем Даша?

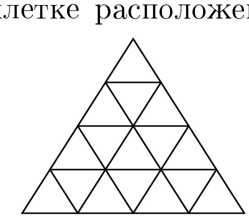
6.2. В игре "Весёлая ферма" два вида валюты: лимоны и капуста. В январе пользователь заплатил за подписку один лимон и 7 капуст, в феврале – 5 лимонов и капусту. На март у него осталось 3 лимона и 3 капусты. Хватит ли этого для оплаты подписки, если цена подписки не меняется из месяца в месяц?

6.3. У Александра есть шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Он разбил эти числа на 3 пары, перемножил числа в каждой паре, сложил эти три произведения, и только их сумму выписал на доску. Потом он снова разбил те же шесть чисел по парам множителей (возможно других), нашел произведения, а их сумму снова выписал на доску. Александр до сих пор разбивает числа на пары множителей, суммирует произведения и выписывает суммы. Может ли так случится, что в какой-то момент среди записанных на доске чисел будет 6 различных чётных?

6.4. Квадрат 7×7 разрезали без остатка на фигурки двух типов, как показано на рисунке (фигурки можно любыми способами поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок из 5 клеток могло получится при разрезании?



6.5. В треугольной таблице из 16 клеток (см. рисунок) в каждой клетке расположен либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который говорит только ложь. Люди называются соседями, если треугольники с ними имеют общий отрезок границы. Каждый из 16 человек произнёс фразу: "Среди моих соседей нечётное число рыцарей". Какое наибольшее число рыцарей может быть в таблице?



6.6 Ученики некоторого класса создали несколько чатов, в каждом из которых больше одного человека. Известно, что нет пары чатов, в которых ровно один общий ученик. На 14 февраля учитель хочет разделить класс на две группы: одну отвести в музей, а другую – в театр. Докажите, что он может сделать это таким образом, чтобы в каждом чате оказался и ученик, который сходил в театр, и ученик, который сходил в музей.

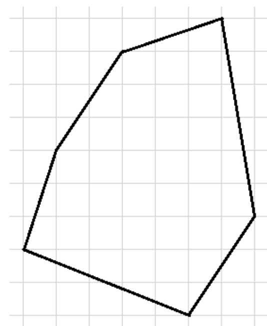
XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

5 класс

5.1. Придумайте хотя бы одно число, чтобы одна из его цифр была в 4 раза меньше суммы всех цифр, а другая из его цифр была в 5 раз меньше суммы всех его цифр.

5.2. Алина на уроке рисования нарисовала в тетради шестиугольник, как на рисунке. Следующий урок был уроком математики, и там её спросили: какая у этого шестиугольника площадь. Помогите Алине и найдите площадь этого шестиугольника (сторона клетки равна 1 сантиметру).



5.3. Добрыня каждый день добирается до школы пешком, проходя 2 километра. По пути он проходит 10 кварталов, тратя на каждый квартал 1 минуту. 1 мая перекрыли один квартал на привычном пути Добрыни и ему пришлось пройти на 2 квартала больше, чтобы добраться до школы. Сколько метров в минуту надо проходить Добрыне, чтобы потратить теперь на свой путь то же время, что и обычно.

5.4. Провожая 2023-й год, 5 класс играл в нетайного Санту. Дети сели в круг и каждый подарил несколько подарков своему левому соседу, а потом подарил правому соседу столько же подарков, сколько получил от него. После этого мальчик Дима заявил, что всего в игре было 2023 подарка, а девочка Катя – что 2024. Известно, что кто-то из них прав. Определите, кто именно, если полученные один раз подарки никто не передаривал.

5.5. В алфавите племени Ывузак есть только три согласные: **В**, **З** и **К** и только три гласные: **У**, **А** и **Ы**. Старейшина племени Пикадор заметил в слове ВУЗАКА два хороших свойства: 1) Гласные и согласные буквы в этом слове чередуются; 2) В этом слове пары соседних букв: ВУ, УЗ, ЗА, АК и КА – не повторяются. Помогите старейшине найти максимальное по длине слово (если их несколько, то годится любое), в котором также выполняются оба хороших свойства и убедите старейшину в том, что его длина максимальна.

5.6. В ряд стоит 11 стульев. Два ведущих решили сыграть в игру: они по очереди сажают на эти стулья людей из зала, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. После того, как все стулья оказались заняты, все сидящие на стульях, если могут, говорят фразу "Рядом со мной сидят рыцарь и лжец" (рыцари при этом должны сказать правду, а лжецы – солгать). Если будет произнесено нечётное число фраз, выигрывает начинающий, а если чётное – его соперник. Кто из ведущих может выиграть независимо от игры соперника? (Можно считать, что в зале как рыцарей, так и лжецов больше 11.)