7 класс

7.1. В стране Мульти-пульти выпущены в обращение банкноты в 43 сантика. Малыш и Карлсон, имея только такие банкноты, зашли в кафе. Карлсон заказал 5 стаканов газировки и 16 пирожков и заплатил за них без сдачи. Малыш заказал 3 стакана газировки и 1 пирожок. Докажите, что сколько бы ни стоили газировка и пирожки, Малыш тоже может расплатиться без сдачи (все цены в стране Мульти-Пульти — целые числа).

Решение. Пусть газировка стоит A сантиков, а пирожок B сантиков. Тогда $5A + 16B$ делится на 43. Тогда и $15A + 48B$ делится на 43, следовательно, $15A + 48B - 43B = 15A + 5B = 5(3A + B)$ делится на 43. Так как 5 взаимно просто с 43, на 43 должен делиться второй множитель, то есть число $3A + B$. А это и есть сумма, которую должен заплатить Малыш.

7.2. В XIX-XX веках Россией правили 6 царей династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович, Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях после отца — сын. Как известно, последнего русского царя, погибшего в Екатеринбурге в 1918 году, звали Николаем. Найдите порядок правления этих царей.

Ответ. Павел Петрович, Александр Павлович, Николай Павлович, Александр Николаевич, Александр Александрович, Николай Александрович.

Решение. В списке нет царя по имени Петр, следовательно, Павел Петрович был первый из этих царей. Других Павлов нет, следовательно, братья Александр Павлович и Николай Павлович правили сразу после Павла Петровича, сменив на троне один другого. Таким образом, последний царь был Николай Александрович (других Николаев нет). Александр Николаевич не мог править после последнего царя, значит, он унаследовал трон после Николая Павловича, который, следовательно, правил после своего брата Александра Павловича. Тогда наследником Александра Николаевича и отцом Николая Александровича мог быть только Александр Александрович.

7.3. Остап Бендер поставил новые покрышки на автомобиль "Антилопа Гну". Известно, что передние покрышки автомобиля выходят из строя через 25000 км, а задние - через 15000 км (спереди и сзади покрышки одинаковые, но задние изнашиваются сильнее). Через сколько километров Остап Бендер должен поменять эти покрышки местами, чтобы "Антилопа Гну" прошла максимально возможное расстояние? Чему равно это расстояние?

Ответ. Сменить покрышки надо через 9375 км, тогда можно проехать 18750 км.

Решение. (1 способ) Пусть Остап Бендер поменял покрышки местами через x километров. Тогда задние покрышки отработали $\frac{x}{15000}$ своего ресурса, а передние $\frac{x}{25000}$. После замены они смогут проработать еще $25000(1 - \frac{x}{15000})$ и $15000(1 - \frac{x}{25000})$ километров соответственно. Таким образом, всего можно проехать не более $x + 25000(1 - \frac{x}{15000}) = 25000 - \frac{2}{3}x$ и не более $x + 15000(1 - \frac{x}{25000}) =$

$15000+\dfrac{2}{5}x$. Максимальное расстояние можно проехать если эти выражения равны (иначе либо первые, либо вторые покрышки выйдут из строя раньше, ведь когда первое выражение растет, то второе уменьшается и наоборот). Таким образом, $25000-\dfrac{2}{3}x=15000+\dfrac{2}{5}x$, откуда $10000=\dfrac{16}{15}x$, или $x=9375$.

Решение. (2 способ) Пусть до смены покрышек Остап Бендер проехал x тысяч километров, а после смены y тысяч километров. Тогда в первые x километров процент износа покрышек составил $\dfrac{x}{25}100\%$ для передних покрышек и $\dfrac{x}{15}100\%$ для задних. После смены покрышек задние стали передними, а передние — задними, поэтому когда Остап Бендер проехал еще y километров, общий износ для тех покрышек, которые стали передними, составил $\dfrac{x}{15}100\%+\dfrac{y}{25}100\%$, а для второй пары покрышек — $\dfrac{x}{25}100\%+\dfrac{y}{15}100\%$. Поскольку износ не может превысить 100%, получаем условие

$$\frac{x}{15}+\frac{y}{25}\leq 1,\quad \frac{x}{25}+\frac{y}{15}\leq 1.$$

Необходимо найти максимум величины $x+y$ (общая длина пробега) при выполнении этих условий. Имеем

$$x+y=\frac{\dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{25}+\dfrac{x}{25}+\dfrac{y}{15}}{\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{25}}\leq\frac{2}{\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{25}}=18.75,$$

причем равенство $x+y=18.75$ достигается, только если оба неравенства обращаются в равенства. Решив систему $\dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{25}=1$, $\dfrac{x}{25}+\dfrac{y}{15}=1$, находим $x=y=9,375$.

7.4. В каждой вершине n-угольника стоит одно из чисел +1 или -1. На каждой стороне написано произведение чисел, стоящих на концах этой стороны. Оказалось, что сумма чисел на сторонах равна нулю. Докажите, что
1) n - четно,
2) n делится на 4.

Решение. На каждой стороне написано либо число 1, либо -1, а так как сумма равна нулю, то сторон обоих типов поровну. Обозначим это количество за m, тогда общее число сторон равно $n=2m$ (то есть четно). Если на стороне написано -1, тогда на концах написано -1 и $+1$, всего таких сторон m. Пусть есть еще k сторон, на обоих концах которых написано $+1$, тогда всего на концах всех сторон написано $m+2k$ единиц, при этом каждую вершину на которой написано $+1$ посчитали дважды. Значит, $m+2k$ — четное число, то есть и m четное, следовательно, $n=2m$ делится на 4.

8 класс

8.1. Сумма квадратов n простых чисел, каждое из которых больше 5, делится на 6. Докажите что и n делится на 6.

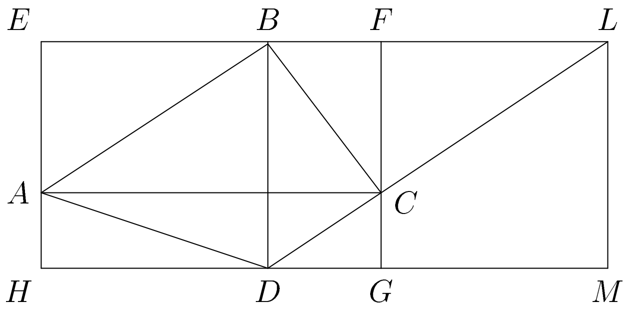
Решение. Если сумма нескольких чисел делится на шесть, то и сумма их остатков при делении на шесть тоже будет делится на 6. Простое число, большее пяти, может иметь при делении на 6 только остатки 1 или 5 (иначе это число будет делиться на 2 или 3). Следовательно, квадрат любого простого числа, большего чем 5, имеет при делении на 6 остаток 1. Так как сумма этих остатков равна количеству чисел n, значит n делится на 6.

8.2. Петя и Вася сделали в тире по 5 выстрелов. Первыми тремя выстрелами они выбили поровну, а последними тремя Петя выбил в три раза больше очков, чем Вася. На мишени остались пробоины в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очков. Куда попал каждый из них третьим выстрелом? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.
Ответ. Третьим выстрелом Петя выбил 10, а Вася — 2 очка.
Решение. Последними тремя выстрелами Вася не мог выбить больше, чем 9 очков (иначе Петя бы выбил последними тремя выстрелами не меньше 30). Меньше 9 очков Вася тоже выбить не мог, так как наименьшая сумма за три выстрела $2+3+4=9$. Следовательно, Вася выбил 2, 3 и 4 очка а Петя 10, 9 и 8 очков (других вариантов набрать 27 очков тремя выстрелами нет). Значит первыми двумя выстрелами мальчики выбили 9, 8, 5 и 4 очка. При этом Петя третьим выстрелом выбил не меньше, чем 8, а Вася — не больше, чем 4 очка. Так как сумма очков после первых трех выстрелов была равной, значит, первыми двумя выстрелами Петя выбил по крайней мере на четыре очка меньше, чем Вася. Единственная возможность — Вася выбил 9 и 8, а Петя 5 и 4 очка, следовательно, третьим выстрелом Вася выбил 2, а Петя 10 очков.

8.3. Если дату 10 февраля 2001 года записать в виде 10.02.2001, а затем убрать точки, то получится палиндром (т.е. число, читающееся слева направо и справа налево одинаково). Найдите ближайшую к 10.02.2001 дату, обладающую тем же свойством. Рассмотрите два случая:
1) требуемая дата еще не наступила,
2) требуемая дата уже прошла.
Ответ обосновать.
Ответ. 1) 20 февраля 2002 2) 29 ноября 1192 года. Решение. Заметим, что при условии, что дата записывается как палиндром, день и месяц однозначно находятся по заданному году.
пункт (1): в 2001 году других палиндромов быть не может, а в следующем (2002) году это должен быть 20 день второго месяца.
Пункт (2): Чтобы дата была как можно ближе к 2001 году, необходимо брать самый большой возможный год, меньший 2001. Вторая цифра года должна быть первой цифрой месяца, то есть 0 или 1, т.к. месяцев не больше 12. В 2000 году палиндрома быть не может (нулевого дня не бывает), следовательно, первые две цифры года — 11 (соответственно, месяц — ноябрь). Третью цифру года нужно взять максимально возможную, т.е. девять, тогда четвертой (так как в ноябре не больше 31 дня) может быть два. Получится дата-палиндром 29.11.1192.

8.4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что $AD+BC \geq AB+CD$.

Решение. Впишем четырехугольник $ABCD$ в прямоугольник $EFGH$ со сторонами, параллельными диагоналям ($EF \| AC$ и $EH \| BD$) — см. рис.1. Пусть L — точка пересечения прямых DC и EF, а M — точка на прямой HG такая, что $LM \| FG$. Тогда $ABLC$ — параллелограмм, следовательно, $AB = CL$. Так как $GM = FL = EB = HD$ и $AH = CG$, то $\triangle AHD = \triangle CGM$, следовательно, $AD = CM$. В силу неравенства треугольника $BM \leq BC + CM = BC + AD$. Но $BM = DL$ как диагонали прямоугольника $BLDM$, и $DL = DC + CL = DC + AB$. Следовательно, $AD + BC \geq DL = DC + CL = DC + AB$, что и требовалось доказать.

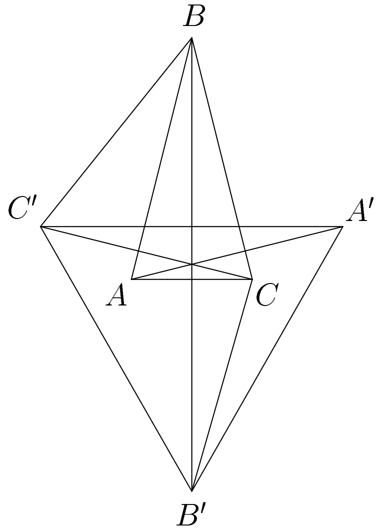


.1.

9 класс

9.1. В треугольнике $\triangle ABC$ угол при вершине B равен 30^o и $AB = BC$. Пусть A', B', C' — точки, симметричные точкам A, B и C соответственно относительно противоположных сторон. Докажите, что треугольник $\triangle A'B'C'$ — равносторонний.

Решение. Если точки C C' симметричны относительной прямой AB, то AB будет серединным перпендикуляром к отезку CC', следовательно, расстояния BC и BC' равны (аналогично для остальных симметричных точек). Треугольник $\triangle BCC'$ равнобедренный (см. рис.2), и угол $CBC' = 2\angle ABC = 60^o$, следовательно $CC' = BC = B'C$. Так как треугольник $\triangle CC'B'$ — равнобедренный и угол $\angle C'CB' = \angle C'CA + \angle ACB' = 15^o + 75^o = 90^o$, то $\angle CC'B' = \angle C'B'C = 45^o$. Отсюда получаем, что $\angle B'C'A' = \angle C'A'B' = 60^o$, то есть $\triangle A'B'C'$ — равносторонний.



.2.

9.2. Найдите все натуральные числа n, такие, что набор чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$ можно разбить на n четверок так, что в каждой четвёрке одно из чисел равнялось бы среднему арифметическому всех остальных.

Ответ. n — четное число.

Решение. Предположим, что число n удовлетворяет условию задачи. Заметим, что если числа a, b, c, d — целые, и a — среднее арифметическое чисел b, c, d, то

сумма $a+b+c+d=4a$ делится на 4. Поэтому сумма всех этих чисел $1+2+\ldots+4n=\frac{4n(4n+1)}{2}=2n(4n+1)$ тоже делится на 4, следовательно, n — четное.
Теперь докажем что любое четное n удовлетворяет условию задачи. Заметим, что первые 8 натуральных чисел можно разбить на четверки $\{4,1,3,8\}$ и $\{5,2,6,7\}$, где первое из чисел — среднее арифметическое остальных. Тогда и следующая восьмерка чисел $\{9,10,\ldots,16\}$ разбивается на четверки $\{4+8,1+8,3+8,8+8\}$ и $\{5+8,2+8,6+8,7+8\}$ и т.д.

9.3. В некотором НИИ все сотрудники либо лжецы (у них все высказывания ложны), либо рыцари (у них все высказывания истинны). Однажды каждый из сотрудников сказал две фразы:
1) В нашем НИИ нет и n человек, которые работают дольше меня.
2) В нашем НИИ по крайней мере m человек получают зарплату больше, чем у меня.
(Все сотрудники назвали одни и те же числа m и n). Известно также, что в этом НИИ никакие два сотрудника не имеют одинаковой зарплаты, и все сотрудники проработали в НИИ разное время. Определите, какое наибольшее и какое наименьшее количество сотрудников может работать в этом НИИ.
Ответ. В НИИ работает $m+n$ человек.
Решение. Рассмотрим n сотрудников, которые работают дольше всех. Для них первое утверждение истинно, значит, все они рыцари (и других рыцарей нет). Рассмотрим того из них, кто получает самую большую зарплату. Так как по крайней мере m человек получают больше него (и это не может быть никто из рыцарей), значит всего сотрудников не меньше чем $m+n$. Заметим, что все кроме первых n рассмотренных — лжецы, т.к. для них не верно первое утверждение. Рассмотрим самого низкооплачиваемого из лжецов. Так как у него второе утверждение ложно, есть не более $m-1$ человека, который получает больше него. Значит, других лжецов не может быть больше чем $m-1$, и всего сотрудников не более $m+n$.

9.4. Доказать,что для любого числа a всегда можно найти числа b и c такие, что у каждого из 6 уравнений $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+cx+b=0$, $bx^2+ax+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$, $cx^2+bx+a=0$ имеется хотя бы один корень.
Решение. При $x=1$ все уравнения принимают вид $a+b+c=0$. Если $a=0$, то можно взять, например, $b=1$ и $c=-1$, а если $a\neq 0$, то можно взять числа $b=0$ и $c=-a$. В обоих случаях $a+b+c=0$, следовательно, число $x=1$ будет корнем каждого из уравнений.

10 класс

10.1. Пусть x, y и z — различные положительные действительные числа. Могут ли числа

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right|,\quad \left|\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right|,\quad \left|\frac{x}{z}-\frac{z}{x}\right|$$

оказаться длинами сторон какого-нибудь треугольника?

Решение. Без ограничения общности считаем что $x > y > z > 0$. Тогда $\left|\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right| = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $\left|\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right| = \frac{y}{z} - \frac{z}{y}$, $\left|\frac{x}{z} - \frac{z}{x}\right| = \frac{x}{z} - \frac{z}{x}$. Докажем неравенство $\left(\frac{x}{z} - \frac{z}{x}\right) > \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)$, или $\frac{(x-z)(x+z)}{xz} > \left(\frac{y}{z} - \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{z}{y}\right) = \frac{y(x-z)}{xz} + \frac{(x-z)}{y}$. Так как $x - z > 0$, сократим обе части неравенства на $x - z$ и получим эквивалентное: $\frac{x+z}{xz} > \frac{y}{xz} + \frac{1}{y}$. Приведем к общему знаменателю и перенесём в правую часть, получим $\frac{xy + zy - y^2 - xz}{xyz} > 0$, или $\frac{x(y-z) + y(z-y)}{xyz} = \frac{(x-y)(y-z)}{xyz} > 0$. Неравенство доказано. Таким образом одно из чисел больше суммы двух других, следовательно, в силу неравенства треугольника, они не могут быть длинами сторон никакого треугольника.

10.2. Натуральное число n назовем хорошим, если существует n целых чисел таких, что и их сумма, и их произведение равно n. Докажите, что все числа вида $4k$ $(k \geq 2,\ k \in \mathbf{N})$ и все числа вида $4k+1$ $(k \in \mathbf{N})$ хорошие.

Решение. Рассмотрим четверку чисел $\{1, 1, -1, -1\}$. Их сумма равна нулю, а произведение единице, следовательно, достаточно представить число в виде суммы m целых чисел, таких что их сумма и произведение равна n, а $n - m$ делится на четыре. К полученному набору можно будет добавить еще несколько указанных выше четверок. Если $n = 4k$ и k четное $(k \geq 2)$, то можно взять $m = 2k$ (возьмем числа $2k$ и 2, и $2k - 2$ чисел равных 1). При нечетном k подойдет $m = 2k - 6$ (по одному разу числа $2k$, -2, -1 и $2k+3$ раз 1). Если $n = 4k+1$ то $m = 1$ (достаточно просто взять число n). Примеры, иллюстрирующие разобранные случаи:

$8 = 2 + 4 + 1 + 1 + (1 + 1 - 1 - 1) = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1))$

$9 = 9 + (1 + 1 - 1 - 1) + (1 + 1 - 1 - 1) = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1)$

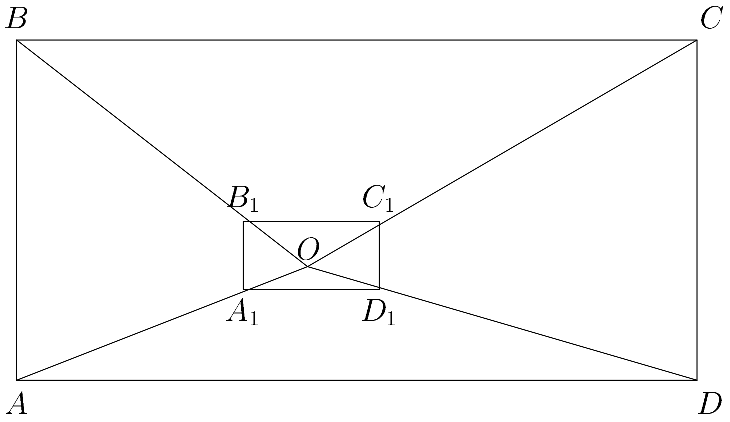
$12 = 6 - 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1^9$

10.3. Про натуральные числа x и y известно, что $24x < 75y < 25x$. Пусть a и b — заданные положительные числа. Докажите, что наименьшее значение выражения $ax + by$ равно $28a + 9b$.

Решение. Обозначим $m = 75y - 24x$ и $n = 25x - 75y$. Из условия следует, что m и n — натуральные числа, причем m делится на 3 и n делится на 25. Выражая $x = m + n$, $y = \frac{25m + 24n}{75}$, получаем, что $ax + by = a(m+n) + b\frac{25m + 24n}{75} = m(a + b/3) + n(a + 8b/25) \geq 3(a + b/3) + 25(a + 8b/25) = 28a + 9b$. Этот минимум достигается, т.к. числа $x = 28$ и $y = 9$ удовлетворяют условию $24x < 75y < 25x$.

10.4. Прямоугольная карта города целиком покрыта второй картой того же города, масштаб которой в 5 раз крупнее, причем так, что их ориентации по сторонам света совпадают и контуры карт не имеют общих точек. Докажите, что как бы карты не были расположены, можно не сдвигая карты с места, проткнуть их иглой так, что точка прокола укажет на обеих картах один и тот же пункт города.

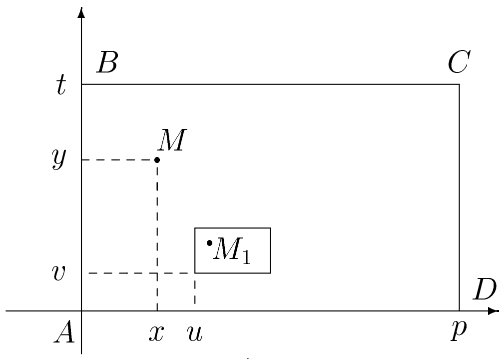
Решение. (1 способ). По условию есть два подобных прямоугольника с коэффициентом подобия 1:5, один из которых ($A_1B_1C_1D_1$) расположен строго внутри другого ($ABCD$) — см. рис.3. Пусть точка O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 Тогда $\triangle ABO$ подобен $\triangle A_1B_1O$ и $\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{B_1A_1}{BA} = \dfrac{1}{5}$. Прямая



.3.

OC_1 пересекает прямую OC в некоторой точке C_2. Так как $\triangle OBC_2$ подобен $\triangle OB_1C_1$, то $\dfrac{B_1C_1}{BC_2} = \dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$, откуда $BC = BC_2$, т.е. точки C и C_2 совпадают. Это означает, что луч OC проходит через точку C_1. Аналогично луч OD проходит через D_1. Точка O — искомая, так как прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ является образом прямоугольника $ABCD$ при гомотетии с коэффициентом $1/5$ и центром в точке O, а точка O — неподвижная точка при данном преобразовании.

Решение. (2 способ). Введем систему координат с осями, проходящими через стороны AB и AD большой карты. Пусть координаты точек B и D будут $(p;0)$ и $(0;t)$ соответственно ($p,t > 0$) — см. рис.4. Пусть координаты левого нижнего угла малой карты A_1 равны (u,v). Так как масштаб малой карты в пять раз меньше, координаты точек B_1 и D_1 будут равны соответственно $(u + p/5, v)$ и $(u, v + t/5)$. Условие, что меньшая карта полностью накрыта большей, означает, что $u + p/5 \le p$ и $v + t/5 \le t$, то есть $u \le 0.8p$ и $v \le 0.8t$. Пусть $M = (x,y)$ — точка большой карты, тогда на малой карте ей соответствует точка $M' = (u + x/5, v + y/5)$. Точка M искомая, если M и M' совпадают, то есть $x = u + x/5$ и $y = v + y/5$, откуда $x = 5u/4$ и $y = 5v/4$. Так как $u \in [0, 0.8p]$ и $v \in [0, 0.8t]$, то $0 \le x \le p$ и $0 \le y \le t$, то есть точка M действительно лежит на карте.



.4.

Замечание При обоих способах решения очевидным образом получается единственность такой точки.

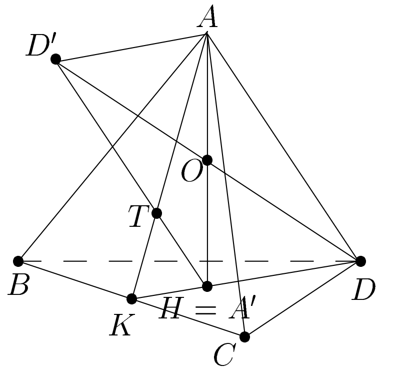
10.5. В корзине лежит 30 грибов. Известно, что если взять любые A из них, то будет взят хотя бы один рыжик, если взять любые B — то хотя бы один боровик, а если любые C — то хотя бы один груздь. Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять числа A, B и C, чтобы содержимое корзины определялось однозначно?

Ответ. $A+B+C=63$, $2 \le A, B, C \le 30$

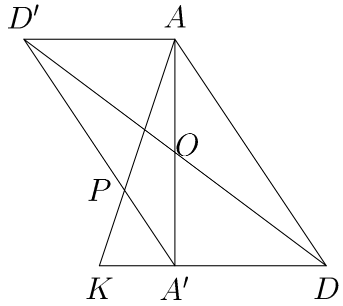
Решение. Очевидно, что числа A, B и C не могут быть больше 30 (иначе из корзины не взять столько грибов, сколько требуется в условии). Кроме того, ни одно из них не равно 1, так как если, например, $A=1$, то в корзине лежат одни рыжики, и остальные условия окажутся невыполнимыми. Если среди любых A грибов есть хотя бы один рыжик, то других грибов может быть не больше чем $A-1$, следовательно, рыжиков в корзине не меньше, чем $30-(A-1)=31-A$. Аналогично, боровиков не меньше, чем $31-B$ и груздей не меньше, чем $31-C$. Тогда всего в корзине не меньше, чем $93-(A+B+C)$ этих видов грибов, значит если $93-(A+B+C) \ge 30$, то других грибов в корзине быть не может (достаточное условие). С другой стороны, так как в корзине всего 30 грибов, $93-(A+B+C) \le 30$ (необходимое условие). Таким образом, необходимое и достаточное условие $93-(A+B+C)=30$, то есть $A+B+C=63$.

11 класс

11.1. Через точку O — середину высоты правильного тетраэдра $ABCD$ — проведены всевозможные прямые, отрезки которых, заключенные внутри тетраэдра, делятся точкой O пополам. Какое множество образуют концы этих отрезков на поверхности тетраэдра?



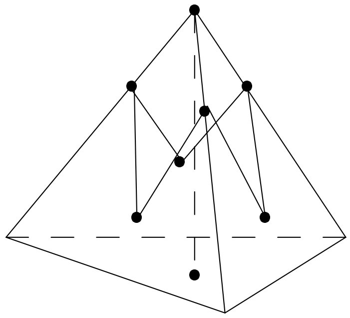
.5.



.5.

Решение. Пусть X — одна из искомых точек, и Y — второй конец отрезка с началом в X и серединой в O. Ясно, что Y тоже искомая точка. Рассмотрим центральную симметрию с центром в точке O. Пусть A', B', C' и D' есть образы точек A, B, C и D при этой симметрии. Так как образом точки Y является точка X, то Y лежит на поверхности тетраэдра $A'B'C'D'$. То есть все искомые точки лежат на пересечении тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Очевидно, верно и то, что всякая точка этого пересечения — искомая. Опишем множество точек пересечения для случая, когда O — середина высоты AH, опущенной из вершины A — см. рис.5а. Тогда $H=A'$, причем эта точка — единственная из искомых, лежащих в грани BCD. Рассмотрим грань ABC. Она пересекается с гранью $B'C'D'$ по точке A и не пересекается с гранью $A'B'C'$, так как грани ABC и $A'B'C'$ параллельны. Чтобы найти пересечение этой грани с гранью $A'B'D'$, рассмотрим сечение плоскостью DAA' (см. рис.5б). Пусть K — середина ребра BC, P — точка пересечения $A'D'$ с гранью ABC. Четырехугольник $ADA'D'$ — параллелограмм (длиагонали делятся точкой пересечения пополам), поэтому

$AD' = A'D$. Треугольники $\triangle PKA'$ и $\triangle AD'P$ подобны ввиду параллельности $A'D$ и AD', коэффициент подобия равен $k = \dfrac{KA'}{AD'} = \dfrac{KA'}{AD} = \dfrac{1}{2}$ (так как тетраэдр правильный), поэтому, во-первых $KP = 2PA$, то есть точка P делит медиану AK треугольника ABC в отношении $1 : 2$, стало быть, P является точкой пересечения медиан, а во-вторых, $A'P : PD' = 1 : 2$, то есть ребро тетраэдра делится также в отношении $2 : 1$. Из соображений симметрии находим, что ребро CA тетраэдра $ABCD$ пересекает грань $A'B'D'$ в такой точке M, что $CM : MA = 2 : 1$. Значит, линия пересечения граней ABC и $A'B'D'$ — отрезок PM. Аналогично, грани ABC и $A'D'C'$ пересекаются по отрезку PF ($FA : FB = 1 : 2$). Такая же картина получается и на гранях ABD и ACD. Окончательно искомое множество состоит из шестизвенной ломаной, вершины A и её проекции на основание BCD — точки A' (см.рис.6).



.6.

11.2. Первые n натуральных чисел переставили $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ таким образом, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ делится на k при всех k, $1 \le k \le n$. Найдите все значения которые может принимать n.

Ответ. $n = 1, 3$.

Решение. Положим $S_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{n+1}{2} = m$ — целое число, значит, n — нечетное. Далее считаем, что $n > 1$. По условию $S_{n-1} = S_n - x_n = nm - x_n = (n-1)m + m - x_n$ делится на $n-1$. Следовательно, $m - x_n$ делится на $n-1$. Но $|m - x_n| = \left|\dfrac{n+1}{2} - x_n\right| \le \left|\dfrac{n+1}{2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+1}{2} - n\right| = \dfrac{n-1}{2} < n-1$. Следовательно, $m - x_n$ может делиться на $n-1$, только если $m - x_n = 0$. Итак, $x_n = \dfrac{n+1}{2}$. Тогда $S_{n-2} = S_n - x_{n-1} - x_n = (n-1)m - x_{n-1} = (n-2)m + m - x_{n-1}$. Следовательно, $m - x_{n-1}$ делится на $(n-2)$. Так как $x_{n-1} \ne x_n = m$, то $|m - x_{n-1}| \ge n-2$. Тогда $\dfrac{n-1}{2} \ge \left|\dfrac{n+1}{2} - x_{n-1}\right| \ge n-2$, откуда $n \le 3$. Но $n > 1$ и нечетно, т.е. $n = 3$. Число $n = 3$ удовлетворяет условию задачи: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

11.3. Докажите, что среди всех трехэлементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 63\}$, количество подмножеств, сумма элементов которых меньше, чем 95, меньше, чем количество подмножеств, у которых эта сумма больше, чем 95.

Решение. Каждому трехэлементному подмножеству $\{a, b, c\}$, где $a + b + c < 95$, сопоставим трехэлементное подмножество $\{64 - a, 64 - b, 64 - c\}$. Тогда $(64 - a) + (64 - b) + (64 - c) = 192 - (a + b + c) \ge 192 - 94 = 98$. Так как разным тройкам сопоставляются разные тройки (иными словами, построено взаимо-однозначное соответствие, или биекция), то троек с суммой их элементов, меньшей 95, столько же, сколько троек с суммой элементов большей 97. Так как существуют тройки с суммой чисел, например, 96 (31+32+33), то троек с суммой элементов меньшей 95, меньше, чем троек с суммой элементов большей 95.

Примечание. Если школьник не проходил понятие множества, то он может посчитать, что тройки вида $\{1,2,3\}$ и $\{2,1,3\}$ — разные, или что допустимы тройки вида $\{1,1,2\}$. Хотя формально такое понимание не соответсвует условию задачи, приведённое решение остаётся правильным.

11.4. Существует ли многочлен $p(x)$ такой, что для всех x ($x \neq \pm 1$, $x \neq \pm 2$)

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = 2x\left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-4}\right) \ ?$$

Ответ. $p(x) = c(x^4 - 5x^2 + 4)$ где c —любое число, не равное нулю.
Решение. (1 способ) По условию

$$p'(x) = \frac{p(x)2x(2x^2-5)}{(x^2-1)(x^2-4)}.$$

Так как многочлен $2x(2x^2-5)$ не делится на $(x^2-1)(x^2-4)$, следовательно, $p(x)$ должен делиться на $(x^2-1)(x^2-4)$, то есть $p(x) = q(x)(x^4-5x^2+4)$ для некоторого многочлена $q(x)$. Тогда $p'(x) = q'(x)(x^4-5x^2+4) + q(x)(4x^3-10x)$. Подставляя в уравнение, находим что $q'(x)(x^4-5x^2+4) + q(x)(4x^3-10x) = q(x)(4x^3-10x)$, откуда $q'(x) = 0$ для всех x, то есть $q(x) = c$ — константа. Любой многочлен вида $p(x) = c(x^4-5x^2+4)$, где $c \neq 0$, удовлетворяет условию задачи.
Решение. (2 способ) Легко проверить следующее утверждение: полином имеет вид $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ $(a \neq 0)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}.$$

Отсюда, раскладывая выражение $2x\left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-4}\right)$ в суммму дробей вида $\frac{1}{x-x_k}$ немедленно получаем ответ.

11.5. Решить в целых числах уравнение

$$2x^3 + 9x^2y + 15xy^2 + 9y^3 + 1 = 3(x+y)(x+2y).$$

Ответ. $x = 1$, $y = 0$ или $y = 2k-1$, $x = 1-3k$, где k любое целое число.
Решение. Уравнение равносильно такому:

$$(x+y)^3 + (x+2y)^3 + 1 = 3(x+y)(x+2y).$$

Пусть $a = x+y$, $b = x+2y$, тогда уравнение записывается в виде $a^3+b^3+1 = 3ab$. Последнее уравнение равносильно следующему

$$(a+b+1)(a^2-(b+1)a+b^2-b+1) = 0.$$

Отсюда либо $a+b+1 = 0$, либо $a = 1$ и $b = 1$. Возвращаясь к переменным x и y, с учетом того, что x и y — целые числа, получаем группу ответов $y = 2k-1$, $x = 1-3k$, где k — любое целое число, и едиственное решение второго уравнения $x = 1$, $y = 0$. (Уравнение вида $2x+3y+1 = 0$ можно решить так: при чётном y справа стоит нечётное число, которое не может быть равно нулю, а при нечетном y записываем $y = 2k-1$ и из уравнения находим x).

Составители:
С.Н.Васильев, Е.Г.Пыткеев, С.Э.Нохрин, В.Т.Шевалдин (ИММ УрО РАН).