XLII-ая ОБЛАСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2001 — 2002 уч. год

ЗАОЧНЫЙ ТУР

Перед Вами задачи по математике заочного тура всероссийской математической олимпиады.

Не смущайтесь, если Вам не удалось решить все задачи, или Вы сомневаетесь в правильности их решения. Присылайте! Жюри по результатом проверки определит тех, кто приглашается на областной тур предметной олимпиады по математике, и может случиться, что удачное решение всего одной задачи обеспечит Вам приглашение.

Требования к оформлению. Работа должна быть выполнена в отдельной тетради, аккуратно и разборчиво. Условия задач переписывать не обязательно, но необходимо проставлять номер задачи, решение которой Вы собираетесь привести. Порядок решения задач произвольный. Разрешается (и даже приветствуется) решение задач более старших классов, нежели Ваш.

Все факты и утверждения, на которые Вы опираетесь в своём решении должны быть математически строго обоснованы, однако доказательства фактов и теорем, проходимых в стандартном курсе средней школы приводить не надо, достаточно простого упоминания их формулировки. Чертежи в геометрических задачах не являются обязательными, но для наглядности желательно их приводить (при этом чертежи можно делать пастой и "от руки", без использования чертежных приборов). Следует только помнить, что в решении ссылка на чертеж недопустима – любой используемый Вами факт должен быть доказан без использования чертежа.

На обложке указать: олимпиада по математике, заочный тур, фамилия, имя, класс. На первой странице должны быть указаны:

1) Фамилия, имя, отчество решавшего;
2) номер класса и школы, а также адрес школы (с индексом);
3) полный домашний адрес (с индексом);
4) домашний телефон;
5) фамилия, имя, отчество учителя математики.

Решения присылать по адресу: 620151, г.Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта 2, каб.9, или по e-mail odm@atrus.ru

Прием работ проводится до 10 декабря 2001 года.

7-ой класс

7.1. Найдите хотя бы одну четверку различных целых чилел, каждое из которых не делится ни на 3, ни на 7, и таких, что сумма любых двух из них делится либо на 3, либо на 7.

7.2. Аня, Ваня, Саня и Даня придумали натуральное число. Аня сказала, что оно двузначное, Ваня — что оно является делителем числа 150, Саня — что оно не равно 150, а Даня — что оно делится на 25. Впоследствии выяснилось, что ровно один из них ошибся. Кто это мог быть? Перечислите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

7.3. В числовом примере одинаковые цифры заменили на одинаковые буквы, а разные — на разные. Получилось:

$$\text{ЛЯ} \cdot \text{ЛЯ} + \text{ЛЯ} = \text{ПУЛЯ}.$$

Восстановите первоначальный вид примера. Найдите все возможные варианты и докажите, что друих нет.

7.4. Имеется 5 прямоугольников размера: 12x7, 7x5, 5x3, 3x2 и 2x2. Из них сложили прямоугольник без "дыр" внутри и без наложения прямоугольников друг на друга. Докажите, что полученный прямоугольник является квадратом.

8-ой класс

8.1. Числа a и b удовлетворяют условиям:

$$0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq 1, \quad \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}.$$

Докажите, что тогда a и b равны между собой.

8.2. Прямая, проходящая через середину стороны AC треугольника ABC, пересекает прямые BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что если $BD = BE$, то $AD = CE$.

8.3. В пять пакетов положили 21 конфету, причем во всех пакетах оказалось различное количество конфет. Известно, что конфеты из любых двух пакетов можно разложить в три других так, что в этих трех пакетах конфет станет поровну. Докажите, что имеется пакет, в который первоначально положили ровно 7 конфет.

8.4. На доске было записано семизначное натуральное число k, делящееся на 33. Дежурный по классу стер вторую, четвертую и шестую цифры числа, после чего на доске осталось число 2001. Найдите сумму цифр числа k. Ответ обоснуйте.

9-ый класс

9.1. Пусть p — простое число, и $G(t) = (t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-p+1)$. Докажите, что если t — целое число, то $G(t)$ делится на p тогда и только тогда, когда число t не делится на p.

9.2. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R, причем центр описанной окружности лежит внутри треугольника. Докажите, что наибольшая из сторон треугольника ABC не меньше, чем $R\sqrt{3}$ (т.е. не меньше стороны правильного треугольника, вписанного в ту же окружность).

9.3. *Задача Т.Моцкина.* Докажите, что для любых чисел x и y выполнено неравенство

$$x^2y^2(x^2+y^2-3)+1 \geq 0.$$

9.4. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир (каждый с каждым ровно одну партию). После окончания турнира выяснилось, что все шахматисты набрали разное количество очков. Докажите, что победитель турнира выиграл по крайней мере на 4 партии больше, чем шахматист, занявший последнее место. (В шахматах за победу в партии дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение очков не дается).

10-ый класс

10.1. Внутри квадрата со стороной 2 расположено 7 многоугольников площади не менее 1 каждый. Докажите, что существуют два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1/7.

10.2. Пусть n — натуральное число. Решите уравнение

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}\right]=\left[\sqrt{n+10}\right].$$

Здесь через $[a]$ обозначена целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

10.3. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $BC \geq AC$. На катете BC отмечена точка T так, что $TA = TB = \rho$. Докажите, что $2\rho^2 \leq AB^2$.

10.4. Пусть $M = 10^6$ — миллион. Докажите, что

$$M^{5000} > M(M-5000)^{5000}.$$

11-ый класс

11.1. *Задача Р.Робинсона.* Доказать, что для любых чисел x и y верно неравенство

$$x^2(x^2-1)^2+y^2(y^2-1)^2-(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1)\geq 0.$$

11.2. В шар радиуса R вписан тетраэдр T такой, что центр шара лежит внутри тетраэдра. Докажите, что в тетраэдре T найдется ребро, длина которого не меньше, чем $l=R\sqrt{8/3}$ (т.е. не меньше ребра правильного тетраэдра, вписанного в тот же шар).

11.3. В четырех ячейках компьютера записаны натуральные числа A, B, C и D. Каждую секунду они меняются на числа $|A-B|$, $|B-C|$, $|C-D|$ и $|D-A|$ соответственно. Докажите, что, начиная с некоторого момента, в ячейках будут записаны четыре нуля.

11.4. 80 клеток таблицы 17x17 окрасили в черный цвет (остальные клетки белые). Разрешается закрасить строку (или столбец) в черный цвет, если большинство клеток этой строки (или столбца) черные. Докажите, что с помощью таких операций не удастся сделать всю таблицу черной.

Составители:
С.Н.Васильев, Е.Г.Пыткеев, С.Э.Нохрин, В.Т.Шевалдин (ИММ УрО РАН).