Фестиваль "Юные интеллектуалы Среднего Урала"
XLIII-ая областная математическая олимпиада школьников

2002 — 2003 учебный год, окружной тур

8 класс

1. Найти все такие тройки чисел, что каждое число из этой тройки равно квадрату суммы двух остальных.

Решение. Пусть $x = (y+z)^2$, $y = (x+z)^2$ и $z = (x+y)^2$. Тогда, вычитая из первого равенства второе находим $x-y = (y+z)^2-(x+z)^2 = (y-x)(y+x+2z)$ что равносильно уравнению $(x-y)(1+x+y+2z) = 0$. Аналогично, вычитая из второго третье находим, что $(y-z)(1+y+z+2x) = 0$. Если $y \neq x$ и $y \neq z$, то $(1+x+y+2z) = 0$ и $(1+y+z+2x) = 0$, отсюда $z = x$, $y+1+3x = 0$, $y = -1-3x = (2x)^2$, но уравнение $4x^2+3x+1$ не имеет действительных корней. Аналогично нет корней когда $x \neq y$ и $x \neq z$, или когда $z \neq x$ и $z \neq y$. Следовательно, $x = y = z$, $x = (2x)^2$, отсюда получаем два решения: $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ и $x_2 = y_2 = z_2 = \frac{1}{4}$.

2. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма трех углов, под которыми из трех оставшихся вершин видна гипотенуза отрезанного треугольника, равна 90^o.

Решение. Пусть $ABCD$ — квадрат, ECF — отрезанный прямоугольный треугольник (см. рис.1). Заметим, что $FD = EC$ и $BE = CF$.
1) $\triangle ECD = \triangle AFD$ (катеты $AD = DC$, $FD = EC$), следовательно, $\angle FAD = \angle EDC$
2) $\triangle BCF = \triangle ABE$ (катеты $AB = BC$, $BE = CF$), следовательно, $\angle CBF = \angle BAE$
Таким образом, $\angle CBF+\angle EAF+\angle EDC = \angle BAE+\angle EAF+\angle FAD = 90^o$, что и требовалось доказать.

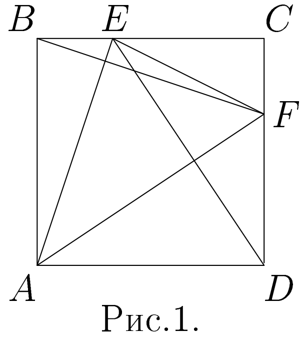

Рис.1.

3. По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой — малоизвестным чиновником, а третий был известным мошенником. В

процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае сказал правду, а в другом — ложь. Вот что они утверждали:
Браун: "Я совершил это. Джон не виноват."
Джон: "Браун не виноват. Преступление совершил Смит."
Смит: "Я не виноват. Виноват Браун."
Определите имя старика, мошенника и чиновника, и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

Решение. Пусть преступление совершил Браун. Тогда оба его высказывания истинны, так же, как и высказывания Смита. Противоречие. Значит, Браун не преступник, а Смит и Браун по крайней мере по разу солгали. Следовательно, уважаемый старик — это Джон, и его утверждение, что преступник Смит соответствует действительности. Таким образом, Браун - чиновник (солгал один раз), а Смит — мошенник.

Ответ. Браун — чиновник, Джон — старик, Смит — мошенник и преступник одновременно.

4. Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 - xy - y - 4 = 0$$

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$x^2-1-y(x+1)-3 = (x-1)(x+1)-y(x+1)-3 = (x+1)(x-1-y)-3 = 0.$$

Так как в последнем выражении оба множителя целые, модуль одного из них должен быть равен трем, а другого — единице, при этом множители должны быть одного знака. Отсюда четыре варианта решения:
1) $x_1 + 1 = 1, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = -4$
2) $x_2 + 1 = -1, \quad x_2 = -2, \quad y_2 = 0$
3) $x_3 + 1 = 3, \quad x_3 = 2, \quad y_3 = 0$
4) $x_4 + 1 = -3, \quad x_4 = -4, \quad y_4 = -4$

9 класс

1. Один хоккеист завершил свою спортивную карьеру сыграв не более 1350 игр. Второй хоккеист сыграл ровно 63% от количества игр, сыгранных первым. После этого, второй хоккеист сыграл еще 1/5 от количества

игр, сыгранных первым, что вместе составило более 1000 игр. Сколько игр сыграл каждый из хоккеистов на момент завершения карьеры первого хоккеиста?

Решение. Пусть на момент завершения карьеры первого хоккеиста первый хоккеист сыграл x игр, а второй сыграл y игр. тогда условия задачи записываются в виде системы

$$\begin{cases} y &= 0.63x \\ x &\leq 1350 \\ y+\frac{1}{5}x &> 1000 \\ x,y &\in \mathbf{N} \end{cases}$$

Подставив y из первого уравнения в третье находим, что $x > \frac{1000000}{83} > 1204$. С другой стороны, из первого уравнения следует, что $100y = 63x$, а так как x и y — натуральные, и числа 100 и 63 взаимно просты, то x делится на 100 без остатка. Но в интервале $1204 < x < 1350$ единственное число, делящееся на 100, это 1300. Итак, $x = 1300$ и $y = 0.63 \cdot 1300 = 819$.

Ответ. Первый хоккеист сыграл 1300 игр, второй — 819.

2. Пусть a, b и c — стороны треугольника.
1) Докажите, что если $2a + 3b > 8c$, то c — наименьшая сторона этого треугольника.
2) Докажите, что если $2a+3b > 7.9c$, то c — не обязательно наименьшая сторона этого треугольника.

Решение. Пусть a, b и c — стороны треугольника

а) Докажем, что если $2a + 3b > 8c$ то c — наименьшая сторона. Действительно, если $c \geq a$ то $3b > 6c + 2(c-a) \geq 6c$, отсюда $b > 2c \geq c + a$. Противоречие с тем, что $b < c+a$. Если же $c \geq b$, то $2a > 5c+3(c-b) \geq 5c$, отсюда $a > 2.5c > b + c$. Противоречие с тем, что $a < b + c$.

б) Существует треугольник со сторонами $a = 5.5$, $c = 5.55$, $b = 11$. Легко проверить, что $2a + 3b > 7.9c$ и при этом $c > a$.

3. В таблице 10×10 расставили числа. В каждой строке подчеркнули самое большое число (если их несколько, то одно из них), а в каждом столбце подчеркнули самое маленькое число (если их несколько, то одно из них). В результате оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты дважды. Доказать, что все числа в таблице равны между собой.

Решение. Пусть m — наименьшее из чисел, подчеркнутых в таблице. Тогда оно наименьшее число в таблице. А так как оно самое большое в своей строке, то все числа этой строки равны m. Аналогично, пусть M — наибольшее из подчеркнутых чисел в таблице. Тогда оно наибольшее число в таблице. А так как оно самое маленькое в своем столбце, то все числа этого столбца равны M. Число, находящееся на пересечении найденных строки и столбца равно одновременно m и M, следовательно, $m = M$, т.е. самое большое из чисел таблицы равно самому маленькому. Значит, все числа таблицы равны между собой.

4. Решить в целых числах уравнение:

$$6m^2 - 2mn + 11m - 3n + 38 = 0$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$(3m - n + 1)(2m + 3) = -35.$$

Число $(2m+3)$ — делитель числа 35, следовательно, $2m+3 = \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$. Отсюда находим восемь вариантов ответа: $m_1 = -2$, $n_1 = 3m_1 + 1 - 35 = -40$; $m_2 = -1$, $n_2 = 33$; $m_3 = -4$, $n_3 = -18$; $m_4 = 1$, $n_4 = 11$; $m_5 = -5$, $n_5 = -21$; $m_6 = 2$, $n_6 = 12$; $m_7 = -19$, $n_7 = 49$; $m_8 = 16$, $n_8 = -57$.

10 класс

1. Пусть числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 1$. Доказать, что

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

Решение. Приведем левую часть к общему знаменателю равному $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$, тогда в числителе будет стоять выражение

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2) =$$

$$x + y + z + xyz(yz + xz + xy) - xy^2 - zy^2 - xz^2 - yz^2 - yx^2 - zx^2. \quad (*)$$

По условию $(yz + xz + xy) = 1$, умножая это выражение на x, y и z находим, что $x = x^2y + xyz + zx^2$, $y = xy^2 + y^2z + xyz$, $z = xyz + yz^2 + z^2x$. Подставляя эти выражения в $(*)$ вместо x, y и z и приводя подобные, находим, что числитель дроби в левой части равен $4xyz$.

2. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны попарно равны параллельны. Докажите, что $S_{ACE} = S_{BDF}$.

Решение. По условию стороны AB и DE равны и параллельны, значит, $ABDE$ — параллелограмм, следовательно, $AE = BD$. Аналогично $AC = DF$ и $BF = CE$, следовательно, треугольники ACE и BDF равны, значит и их площади тоже равны.

3. Можно ли в клетки таблицы 2003×2003 вписать попарно различные натуральные числа так, чтобы все произведения чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке были одинаковыми?

Решение. Покажем, что можно заполнить таким образом любую таблицу, размера $n \times n$, $n > 2$. Для этого выберем различные простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_{(n-1)^2}$, и пусть их произведение равно K. Заполним числами K/p_i все клетки таблицы, кроме самого правого столбца и самой нижней строки. Затем заполним все, кроме нижнего, элементы правого столбца числами вида $K \cdot K_j$, где K_j — произведение знаменателей (p_i) чисел той строки, где стоит этот элемент $(1 \leq j \leq n-1)$. Тогда произведение чисел в любой строке, кроме нижней, равно K^n. Аналогично, заполним нижнюю строчку, числами $K \cdot M_k$, где M_k — произведение знаменателей чисел того столбца, где стоит этот элемент $(1 \leq k \leq n-1)$. В оставшуюся клетку впишем число 1. Получили требуемую расстановку.

4. Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{a_n}$ при $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что $a_{2000} > 100$.

Решение. Обозначим для всех $k \in \mathbf{N}$ количество членов последовательности, лежащих в полуинтервале $(k, k+3]$ через p_k. Заметим, что последовательность $\{a_n\}$ строго возрастает, и $a_1 = 1$. Пусть a_m — наименьший член последовательности, больший чем k. Тогда $k < a_m < a_{m+1} < \ldots < a_{m+p_k-1} \leq k+3$. Заметим, что

$$a_{m+p_k-1} = a_{m+p_k-2} + \frac{3}{a_{m+p_k-2}} = a_{m+p_k-3} + \frac{3}{a_{m+p_k-2}} + \frac{3}{a_{m+p_k-3}} = \ldots =$$

$$= a_m + 3\left(\frac{1}{a_{m+p_k-2}} + \frac{1}{a_{m+p_k-3}} + \frac{1}{a_m}\right) \geq a_m + 3\frac{p_k-1}{k+3},$$

так как каждое из слагаемых не превосходит $\frac{1}{k+3}$. Итак, $a_{m+p_k-1} - a_m \geq 3\frac{p_k-1}{k+3}$. Но $a_{m+p_k-1} - a_m < 3$, поэтому $\frac{p_k-1}{k+3} < 1$, и $p_k < k+4$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Пусть x — число членов последовательности $\{a_n\}$ которые не больше 100. Тогда $x = p_{97} + p_{94} + p_{91} + \ldots + p_4 + p_1 + 1 < 101 + 98 + 95 + \ldots + 8 + 5 + 1 = \frac{101+5}{2}33 + 1 = 1750$, т.е. уже $a_{1751} > 100$ и тем более $a_{2000} > 100$.

Решение. Заметим, что так как последовательность $\{a_n\}$ строго возрастает, при любых $m, j \in \mathbf{N}$

$$a_{m+j} = a_{m+j-1} + \frac{3}{a_{m+j-1}} = a_{m+j-2} + \frac{3}{a_{m+j-1}} + \frac{3}{a_{m+j-2}} = \ldots =$$

$$= a_m + 3\left(\frac{1}{a_{m+j-1}} + \frac{1}{a_{m+j-2}} + \frac{1}{a_m}\right) \geq a_m + 3\frac{j}{a_{m+j-1}}. \qquad (*)$$

Для всех $k \in \mathbf{N}$ обозначим через p_k количество членов последовательности, лежащих в полуинтервале $(k, k+3]$. Пусть a_m — наименьший член последовательности, больший чем k. Тогда $k < a_m < a_{m+1} < \ldots < a_{m+p_k-1} \leq k+3$. Из (*) следует, что $a_{m+p_k-1} \geq a_m + 3\frac{p_k-1}{a}{}_{m+p_k-2} \geq a_m + \frac{p_k-1}{k+3}$. Но $a_{m+p_k-1} - a_m < 3$, поэтому $\frac{p_k-1}{k+3} < 1$, и $p_k < k+4$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Пусть x — число членов последовательности $\{a_n\}$ которые не больше 100. Тогда $x = p_{97} + p_{94} + p_{91} + \ldots + p_4 + p_1 + 1 < 101 + 98 + 95 + \ldots + 8 + 5 + 1 = \frac{101+5}{2}33 + 1 = 1750$, т.е. уже $a_{1751} > 100$ и тем более $a_{2000} > 100$.

Решение. Возведем обе части определения последовательности в квадрат $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 6 + \frac{9}{a_n^2}$.

$$a_{2000}^2 = a_{1999}^2 + 6 + \frac{9}{a_{1999}^2} = a_{1998}^2 + 6 + 6 + \frac{9}{a_{1999}^2} + \frac{9}{a_{1998}^2} = \ldots =$$

$$= a_1^2 + 6 \cdot 1999 + + \frac{9}{a_{1999}^2} + \ldots + \frac{9}{a_1^2} > 1 + 6 \cdot 1999 = 11995.$$

Так как $a_{2000}^2 > 11995 > 100^2$, $a_{2000} > 100$.

11 класс

1. Существует ли множество, состоящее из 100 действительных чисел и обладающее свойством: вместе с каждым числом x в этом множестве содержится число $2x^2 - 1$?

Решение. Да, существует. Например, множество

$$A = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi 2^k}{2^{64}-1}\ (k = 0, \ldots, 63),\ \cos\frac{\pi 2^\ell}{2^{32}-1}\ (\ell = 0, \ldots, 31)\right\}$$

Множество A состоит из 100 элементов (так как функция $\cos x$ монотонно убывает от 0 до π). С помощью формулы $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$

легко убедиться, что вместе с каждым элементом x в этом множестве находится элемент вида $2x^2-1$.

Решение. Рассмотрим последовательность $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_{k+1}=\sqrt{\frac{1+x_k}{2}}$ при $k\in\mathbf{N}$, $k\geq 2$. Отметим, что $x_3=0>x_2$, и функция $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ возрастает по x при $x\geq -1$, значит, последовательность x_k строго возрастает при $k>2$. Кроме того, при $k>2$ все $x_k<1$. Множество $\{x_1,\ldots,x_{100}\}$ является искомым так как $2x_{k+1}^2+1=x_k$ при всех $k\in\mathbf{N}$, и $2x_1^2+1=x_1$.

2. Пусть AC — наибольшая из диагоналей параллелограмма $ABCD$. Из вершины C на продолжение сторон AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF соответственно. Докажите, что $AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$.

Решение. См.рис.3. Положим $\angle BAD=\alpha$. Тогда $\angle EBC=\alpha=\angle CDF$. Кроме того, $AE=AB+BE$, $AF=AD+DF=BC+DF$. Так как $\triangle BEC$ — прямоугольный, получаем $BE=BC\cos\alpha$. Аналогично, так как $\triangle CDF$ — прямоугольный, то $DF=CD\cos\alpha=AB\cos\alpha$. По теореме косинусов для $\triangle ABC$

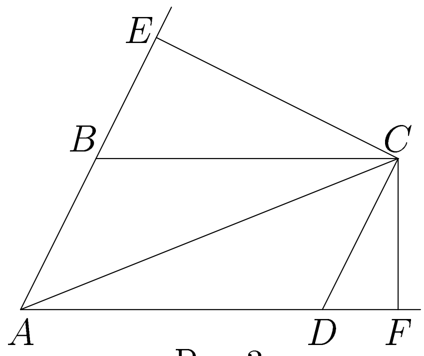

Рис.3.

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=AB^2+BC^2+2AB\cdot BC\cos\alpha.$$

Из того, что $AB\cdot AE+AD\cdot AF=AB(AB+BC\cos\alpha)+BC(BC+AB\cos\alpha)=AB^2+BC^2+2AB\cdot BC\cos\alpha$ следует утверждение задачи.

3. Все натуральные числа раскрашены в красный и синий цвета так, что чисел каждого цвета бесконечно много.Докажите, что найдется число, являющееся одновременно и суммой двух красных чисел, и суммой двух синих чисел.

Решение. Рассмотрим два случая:

Случай 1: Есть два одноцветных числа (пусть это числа a и b) между которыми все числа другого цвета и при этом $b-a>2$. Тогда число $a+b=(a+1)+(b-1)$является искомым.

Случай 2: Таких пар чисел не существует. Пусть m — наименьшее число, цвет которого отличен от цвета 1. Тогда числа $m+1$ и $m+3$ имеют тот же цвет, что и 1, а числа m, $m+2$, $m+4$ — противоположный цвет. Значит, число $2m+4=m+(m+4)=(m+1)+(m+3)$ — искомое.

4. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, и при всех $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$, p_n — наибольший простой делитель числа $p_1 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$. Встретится ли среди чисел p_n, $n \in \mathbf{N}$, число 5?

Решение. Пусть $p_n = 5$ при некотором $n > 2$. Так как $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, то число $A = p_1 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$ не делится ни на 2, ни на 3. Так как самый большой простой делитель числа A равен $p_n = 5$, значит, $A = 5^m$, для некоторого $m \in \mathbf{N}$. Тогда

$$2 \times 3 \times \ldots \times p_{n-1} = 5^m - 1.$$

Но число $2 \times 3 \times \ldots \times p_{n-1}$ делится на 2, и не делится на 4 (поскольку ни одно из чисел p_k при $k > 2$ не может делиться на 2), а число $5^m - 1 = (5-1)(5^{m-1} + 5^{m-2} + \ldots + 1)$ делится на 4. Противоречие, следовательно, $p_n \neq 5$ при всех $n \in \mathbf{N}$.

Составители:
С.Н.Васильев, Е.Г.Пыткеев, С.Э.Нохрин, В.Т.Шевалдин (ИММ УрО РАН).