ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2008 — 2009 УЧ. ГОД

6-й — 7-й КЛАСС

6 — 7.1. а) Существует ли трёхзначное число, все цифры которого одинаковы, но при написании его словами русского языка все эти слова начинаются с разных букв?

б) Существует ли трёхзначное число, все цифры которого различны, но при написании его словами русского языка все эти слова начинаются с одной и той же буквы?

6 — 7.2. (Из материалов Кишинёвской гимназии 1879 года.) Три мужа - Андрей, Иван и Степан пошли со своими жёнами - Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван больше Екатерины на 11 вещей, а Степан меньше Ольги на 23 вещи. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал на 63 рубля больше, чем его собственная жена.

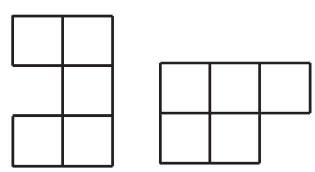
6 — 7.3. Расставьте числа в пустых клетках таблицы

			17				20				

так, чтобы сумма чисел в любых трёх соседних клетках была одинакова, а сумма всех двенадцати чисел равнялась 200.

6 — 7.4. В городской думе города N ровно 60% депутатов считают введение ЕГЭ полезной мерой, 30% — вредной, а оставшиеся 10% путают ЕГЭ с ГИБДД. Однако остальные взрослые жители города N (не являющиеся депутатами) имеют другое мнение: лишь 10% из них считают ЕГЭ полезным, 20% — вредным, а остальные 70% думают, что это явление временное. Сколько процентов всех взрослых жителей города считают ЕГЭ полезным, если вредным его считают ровно 20,01% из них?

6 — 7.5. Из клетчатой доски 6×6 вырезали произвольным образом 11 клеток. Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать хотя бы одну из двух указанных фигур. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать).



6 — 7.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2008 — 2009 УЧ. ГОД

8-й КЛАСС

8.1. На шоу "Последний герой" островитяне случайно нашли склад операторов телевидения, где хранилось несколько бутылок газировки. Ночью участники шоу пришли на склад и выпили 10 бутылок, причём все пришедшие выпили поровну. Утром у некоторых островитян проснулась совесть, поэтому следующей ночью на склад пришли только семеро. Они допили оставшуюся газировку, причём каждому из них досталось напитка вдвое меньше, чем накануне. Сколько бутылок газировки было на складе до прихода нежданных пришельцев?

8.2. Сократите дробь

$$\frac{x^2(y^3-z^3)+y^2(z^3-x^3)+z^2(x^3-y^3)}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}.$$

8.3. Пусть запись $a\Box b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a+b$, а запись $a\Diamond b$ — наименьшее из чисел $a+b$ и $2b$.

Решите уравнения:

а) $x\Box 3 = 5\Box x$

б) $x\Diamond 3 = 5\Diamond x$

в) $(x\Diamond 1)\Diamond 2 = 2\Box(1\Box x)$.

8.4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD угла C. На прямой AC взята точка E так, что $\angle EDC = 90°$. Найти EC, если $AD = 1$.

8.5. Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил в уме их сумму на их произведение. После этого он стёр самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался втрое больше первого. Какое число стёр Незнайка?

8.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий ("+", "−", "×", ":") так, чтобы

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7+7\cdot 7$, $7\cdot\sqrt{7\times 7}+1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2008 — 2009 УЧ. ГОД

9-й КЛАСС

9.1. Незнайка сказал, что если сложить все числа, которые могут получиться при вычёркивании любых 5 цифр семизначного номера его телефона, то получится 2009. Докажите, что Незнайка ошибся в вычислениях.

9.2. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно. Оказалось, что периметр треугольника CMK ровно в два раза меньше периметра квадрата. Найдите угол MAK.

9.3. Пусть a, b, c, d, A, B, C, D — положительные числа.

$$\alpha = \max\left(\frac{a+c}{A+C}, \frac{b+d}{B+D}\right), \quad \beta = \min\left(\frac{a+b}{A+B}, \frac{c+d}{C+D}\right).$$

Докажите неравенство $\alpha \geqslant \beta$.

9.4. Кот Матроскин как-то под Новый год разделил все действительные числа между собой и Шариком так, что

1) сумма любых двух чисел Матроскина — число Матроскина;
2) сумма любых двух чисел Шарика — число Матроскина;
3) сумма любых числа Шарика и числа Матроскина — число Шарика.

Какие числа достались Шарику?

9.5. Известно, что произвольное действительное число a однозначно представимо в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ — целое число (целая часть числа a), а $\{a\}$ — дробная часть числа a, $0 \leqslant \{a\} < 1$.

Про некоторое число x известно, что $\{32x\} = \{200x\}$, $\{2x\} = \{100x\}$. Докажите, что $\{x\} = \{155x\}$.

9.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,
2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(<u>Замечание.</u> Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2008 — 2009 УЧ. ГОД

10-й КЛАСС

10.1. Докажите, что если для действительных чисел a, b, c выполнены неравенства $a+b+c>0$, $ab+bc+ac>0$, $abc>0$, то все эти числа положительные.

10.2. Вычислите значение выражения

$$\min_{x\in[-1,1]}\left(\max_{y\in[-1,1]}\left(\min_{z\in[-1,1]}|x+y+z|\right)\right).$$

10.3. Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники у которых зафиксирована вершина прямого угла, а сумма катетов является постоянной величиной (пусть для определённости она равна d). Найдите геометрическое место точек, каждая из которых является центром квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника вне его.

10.4. Юношей и девушек на балу было поровну. Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, либо с более умной, чем та, с которой он танцевал танго. А один юноша танцевал вальс с девушкой одновременно и более красивой и более умной. Могло ли такое быть?

10.5. Натуральное число назовем *своим*, если оно представимо в виде среднего арифметического квадратов рациональных чисел. Верно ли, что все натуральные числа свои? Решить задачу в предположении, что имеется ввиду среднее арифметическое

а) в точности двух квадратов;

б) нескольких (возможно, одного) квадратов.

10.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7+7\cdot 7$, $7\cdot\sqrt{7\times 7}+1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2008 — 2009 УЧ. ГОД

11-й КЛАСС

11.1. Пусть x, y, z - действительные числа и $A = \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$. Найти наибольшее значение числа A.

11.2. Для двух бесконечных в обе стороны, возрастающих арифметических прогрессий $A = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $B = \{b_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ будем писать, что $B \sqsubseteq A$, если сумма любых двух членов прогрессии B — элемент прогрессии A. Пусть известно, что $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$.

а) Докажите, что разности этих прогрессий равны.

б) Прогрессия A содержит число 2009. Укажите все действительные числа, которые не могут являться элементами B. Ответ обоснуйте.

11.3. Докажите для всех различных положительных чисел a, b неравенство:

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

11.4. Острый угол параллелограмма $ABCD$ равен 45°. На диагонали AC отмечена точка K, так что угол BKD равен 90°. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению $AK \cdot KC$.

11.5. Почтальон Печкин поделил все действительные числа между котом Матроскиным и Шариком так, что

1) произведение любых двух чисел Матроскина — число Матроскина;

2) произведение любых двух чисел Шарика — число Матроскина;

3) произведение любых числа Шарика и числа Матроскина — число Шарика.

Известно, что число $-\pi$ досталось Шарику. Кому достались остальные числа?

11.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).

Решения задач
6-й — 7-й КЛАСС

6 — 7.1. *а) Существует ли трёхзначное число, все цифры которого одинаковы, но при написании его словами русского языка все эти слова начинаются с разных букв?*

б) Существует ли трёхзначное число, все цифры которого различны, но при написании его словами русского языка все эти слова начинаются с одной и той же буквы?

Ответ: а) 111. б) 147.

6 — 7.2. *(Из материалов Кишинёвской гимназии 1879 года.) Три мужа - Андрей, Иван и Степан пошли со своими жёнами - Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван больше Екатерины на 11 вещей, а Степан меньше Ольги на 23 вещи. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал на 63 рубля больше, чем его собственная жена.*

Решение: Пусть в некоторой паре муж — жена, муж купил x вещей, жена купила y вещей. Тогда их затраты составили x^2 и y^2 рублей соответственно. По условию задачи $x^2-y^2=63$, т.е. $(x-y)(x+y)=63$. Так как числа x и y натуральные, числа $x-y$ и $x+y$ — натуральные делители числа 63, т.е. входят во множество $\{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Кроме того, $x-y<x+y$. Возможно три варианта: 1) $\begin{cases} x-y &= 1 \\ x+y &= 63, \end{cases}$ (откуда $x=32$, $y=31$), 2) $\begin{cases} x-y &= 3 \\ x+y &= 21, \end{cases}$ (откуда $x=12$, $y=9$) и $\begin{cases} x-y &= 7 \\ x+y &= 9, \end{cases}$ (откуда $x=8$, $y=1$). Единственная пара этих чисел, дающая разность 11 — это $x=12$, $y=1$, значит, Иван купил 12 вещей, а Екатерина — одну. Разность 23 имеют две пары: $x=32$, $y=9$ и $x=8$, $y=31$. Так как x — число предметов, покупаемых мужчиной, отсюда находим, что Андрей купил 32 вещи, Анна — 9 вещей, Степан — 8 вещей, а Ольга — 31 вещь. Отсюда находим ответ.

Ответ: Андрей женат на Ольге, Иван — на Анне, Степан — на Екатерине.

6 — 7.3. *Расставьте числа в пустых клетках таблицы*

			17				20				

так, чтобы сумма чисел в любых трёх соседних клетках была одинакова, а сумма всех двенадцати чисел равнялась 200.

Ответ.

17	20	13	17	20	13	17	20	13	17	20	13

Замечание. Решение единственно.

6 — 7.4. *В городской думе города N ровно 60% депутатов считают введение ЕГЭ полезной мерой, 30% — вредной, а оставшиеся 10% путают ЕГЭ с ГИБДД.*

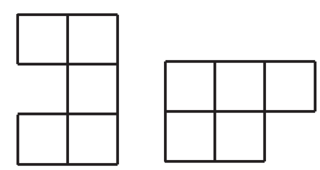
Однако остальные взрослые жители города N (не являющиеся депутатами) имеют другое мнение: лишь 10% из них считают ЕГЭ полезным, 20% — вредным, а остальные 70% думают, что это явление временное. Сколько процентов всех взрослых жителей города считают ЕГЭ полезным, если вредным его считают ровно 20,01% из них?.

Решение: Пусть в городе N ровно x взрослых жителей, из которых y являются депутатами. Тогда считают ЕГЭ вредным $0,2001x$ взрослых жителей города. Среди этих людей $0,3y$ депутатов и $0,2(x-y)$ не депутатов. Из уравнения $0,2001x = 0,3y + 0,2(x-y)$ находим, что $x = 1000y$.

Полезным ЕГЭ считают $0,6y$ депутатов и $0,1(x-y)$ не депутатов, всего $0,5y+0,1x$ взрослых жителей города. В процентном отношении это составляет $0,5(y/x)+0,1 = 0,1005$, т.е 10,05%.

Ответ: 10,05% взрослых жителей города.

6 — 7.5. *Из клетчатой доски* 6×6 *вырезали произвольным образом 11 клеток. Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать хотя бы одну из двух указанных фигур. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать).*



Решение: Доска 6×6 легко разрезается на 6 прямоугольников 2×3. Согласно принципу Дирихле, найдётся прямоугольник, из которого вырезано не более одной клетки. Если эта клетка угловая — то получается вторая фигура, если не угловая — то первая. Наконец, если из прямоугольника клеток не вырезано ни одной, то можно получить любую из указанных фигур.

6 — 7.6. *Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы*

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7\cdot7$, $7\cdot\sqrt{7\times7}+1$ *и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).*

Ответ: Это возможно: $7\cdot(7+1:7)$.

8-й КЛАСС.

8.1. *На шоу "Последний герой" островитяне случайно нашли склад операторов телевидения, где хранилось несколько бутылок газировки. Ночью участники шоу пришли на склад и выпили 10 бутылок, причём все пришедшие выпили поровну. Утром у некоторых островитян проснулась совесть, поэтому следующей ночью на склад пришли только семеро. Они допили оставшуюся газировку, причём каждому из них досталось напитка вдвое меньше, чем накануне. Сколько бутылок газировки было на складе до прихода нежданных пришельцев?*

Решение: Пусть на складе хранилось n бутылок газировки, (n — число натуральное), а островитян было m человек ($m > 7$). Тогда каждый из них в первую ночь выпил $10/m$ бутылок, поэтому во вторую ночь каждому из семи пришельцев досталось $5/m$ бутылок. Так как бутылок оставалось $n-10$, имеем уравнение $(n-10) = 7\cdot 5/m$, откуда $m(n-10) = 35$. Тогда m — натуральный делитель числа 35, больший 7, т.е. $m = 35$. Значит, $n - 10 = 1$, и $n = 11$.

Ответ: 11 бутылок.

8.2. *Сократите дробь*

$$\frac{x^2(y^3-z^3)+y^2(z^3-x^3)+z^2(x^3-y^3)}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}.$$

Решение: Так как

$$x^2(y^3-z^3)+y^2(z^3-x^3)+z^2(x^3-y^3)=$$

$$=x^2y^3-y^2x^3+y^2z^3-x^2z^3+z^2(x-y)(x^2+xy+y^2)=$$
$$=x^2y^2(y-x)+z^3(y-x)(y+x)+(x-y)(z^2x^2+z^2xy+z^2y^2)=$$
$$=(y-x)(x^2y^2+z^3y+z^3x-z^2x^2-z^2xy-z^2y^2)=$$
$$=(y-x)(x^2y^2-z^2x^2+z^3y-z^2y^2+z^3x-z^2xy)=$$
$$=(y-x)(x^2(y-z)(y+z)+z^2y(z-y)+z^2x(z-y))=$$
$$=(y-x)(y-z)(x^2y+x^2z-z^2y-z^2x)=(y-x)(y-z)(y(x^2-z^2)+xz(x-z))=$$
$$=(y-x)(y-z)(y(x-z)(x+z)+xz(x-z))=(y-x)(y-z)(x-z)(yx+yz+xz),$$

а

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=xy^2-yx^2+yz^2-xz^2+z(x-y)(x+y)=$$

$$=xy(y-x)+z^2(y-x)+z(x-y)(x+y)=(y-x)(xy+z^2-zx-zy)=$$
$$=(y-x)((x-z)y+z(z-x))=(y-x)(x-z)(y-z),$$

то вся дробь равна

$$\frac{(y-x)(y-z)(x-z)(yx+yz+xz)}{(y-x)(x-z)(y-z)}=yx+yz+xz.$$

8.3. *Пусть запись $a\Box b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a+b$, а запись $a\Diamond b$ — наименьшее из чисел $a+b$ и $2b$.*

Решите уравнения:

а) $x\Box 3 = 5\Box x$

б) $x\Diamond 3 = 5\Diamond x$

в) $(x\Diamond 1)\Diamond 2 = 2\Box(1\Box x)$.

Решение. а) Если $x > 5$, то $2x = x\Box 3 = 5\Box x = 5 + x$. Отсюда $x = 5 > 5$, чего быть не может. Пусть $x < 3$. Тогда $x + 3 = x\Box 3 = 5\Box x = 10$. Отсюда $x = 7 < 3$, чего быть не может. Если $3 \leqslant x \leqslant 5$, то $2x = x\Box 3 = 5\Box x = 10$, следовательно $x = 5$ является решением.

б) Решение исходного равенства обязано быть решением одного из следующих четырёх равенств:

$$x + 3 = 5 + x,\ x + 3 = 2x,\ 6 = 5 + x,\ 6 = 2x,$$

то есть или $x = 3$, или $x = 1$. Проверка показывает, что в исходное подходит только $x = 3$.

в) Способ 1. Заметим, что $x\Box y = x + \max(x, y)$, $x\Diamond y = y + \min(x, y)$. Тогда $(x\Diamond 1)\Diamond 2 = 2\Box(1\Box x)$ эквивалентно $(1 + \min(x, 1))\Diamond 2 = 2\Box(1 + \max(1, x))$, которое, в свою очередь, эквивалентно $2 + \min(2, 1 + \min(x, 1)) = 2 + \max(2, 1 + \max(1, x))$, то есть $\min(2, 2 + \min(x - 1, 0)) = \max(2, 2 + \max(0, x - 1))$ и $\min(x - 1, 0) = \min(0, \min(x - 1, 0)) = \max(0, \max(0, x - 1)) = \max(0, x - 1)$. Итак, $x = 1$.

Способ 2. Заметим, что

$$x\Box y = x + \max(x, y) \geqslant x + y \geqslant y + \min(x, y) = x\Diamond y$$

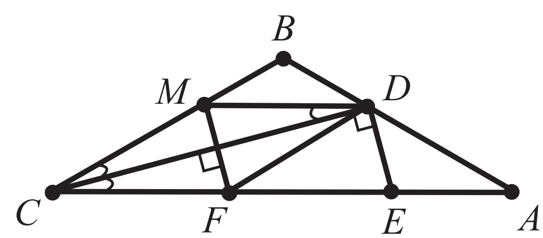
Тогда

$$2 + x + 1 \geqslant 2 + x\Diamond 1 \geqslant 2 + \min(2, x\Diamond 1) = (x\Diamond 1)\Diamond 2 =$$
$$= 2\Box(1\Box x) = 2 + \max(2, 1\Box x) \geqslant 2 + 1\Box x \geqslant 2 + 1 + x.$$

Следовательно в этой строке все неравенства суть равенства, в частности $2 \leqslant \max(2, 1\Box x) = 1\Box x = 1 + x = x\Diamond 1 = \min(2, x\Diamond 1) \leqslant 2$, т.е. $x + 1 = 2$, $x = 1$.

Ответ: а) $x = 5$, б) $x = 3$, в) $x = 1$.

8.4. *В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD угла C. На прямой AC взята точка E так, что $\angle EDC = 90°$. Найти EC, если $AD = 1$.*



К задаче 8.4.

Решение. Проведём через точку D прямую, параллельную основанию AC; пусть эта прямая пересекает сторону BC в точке M. $\angle DCB = \angle DCA$, так как CD — биссектриса; $\angle CDM = \angle DCA$, как внутренние накрест лежащие. Отсюда треугольник MCD — равнобедренный. Проведём через D прямую, параллельную BC; пусть она пересекает AC в точке F. Тогда четырёхугольник $CFDM$ — параллелограмм с равными сторонами, т.е. ромб. Его диагонали перпендикулярны, поэтому $MF \parallel DE$, и четырёхугольник $FMDE$ также является параллелограммом. Из равенства противоположных сторон параллелограмма имеем $CF = MD$ и $FE = MD$, поэтому $CE = 2MD = 2MC$. Остаётся заметить, что $MC = DA = 1$ в силу равнобедренности треугольника ABC.

Ответ: 2.

8.5. *Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил в уме их сумму на их произведение. После этого он стёр самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался втрое больше первого. Какое число стёр Незнайка? Ответ обосновать.*

Решение: Пусть S и P — сумма и произведение написанных на доске чисел, x — стёртое Незнайкой число. Так как x — наименьшее из написанных чисел, то $x < S/2$. Из условия задачи имеем уравнение $3\dfrac{S}{P} = \dfrac{S-x}{\frac{P}{x}}$, откуда (учитывая то, что P — положительное число) имеем: $3S = Sx - x^2$, т.е. $S = \dfrac{x^2}{x-3} = \dfrac{x^2-9+9}{x-3} = x + 3 + \dfrac{9}{x-3}$. Так как x и S — натуральные числа, то из полученного равенства следует, что число $x-3$ — делитель числа 9, откуда $x \in \{2, 4, 6, 12\}$. Если $x = 2$, то $S < 0$, что невозможно. Если $x = 4$, то $S = 16$. Это возможный случай, например, если изначально были написаны два числа 4 и 12 или три числа 4, 5 и 7. Если $x = 6$, то $S = 12$ и неверно, что $x < S/2$. Это же противоречие возникает и в случае $x = 12$ (тогда $S = 16$).

Ответ: Незнайка стёр число 4.

8.6. *Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы*

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(<u>Замечание.</u> Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ *и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).*

Ответ: Это возможно: $7 \cdot (7 + 1 : 7)$.

9-й КЛАСС.

9.1. *Незнайка сказал, что если сложить все числа, которые могут получиться при вычёркивании любых 5 цифр семизначного номера его телефона, то получится* 2009. *Докажите, что Незнайка ошибся в вычислениях.*

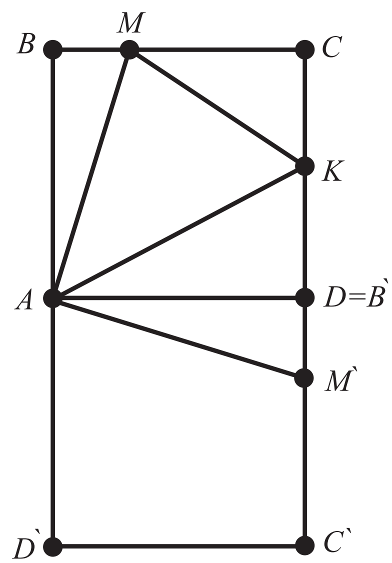
Решение: Способ 1. Остаток от деления на три каждого числа равен остатку от деления на три его суммы цифр. Тогда и сумма, посчитанная Незнайкой, должна иметь тот же остаток от деления на три, что сумма S цифр всех двузначных чисел, содержащихся в номере. Каждая цифра номера вместе с любой другой из оставшихся шести участвует в ровно одном двузначном числе; то есть в сумме S будет посчитана ровно 6 раз. Следовательно, сумма S будет делиться на 3. Тогда и число, посчитанное Незнайкой, должно делиться на 3. Но 2+9 не делится на три. Следовательно Незнайка ошибся.

Способ 2. Пусть телефонный номер имеет вид $\overline{n_0n_1n_2n_3n_4n_5n_6}$. Тогда искомая сумма равна

$$S = \overline{n_0n_1} + \overline{n_0n_2} + \ldots + \overline{n_5n_6} = (10n_0 + n_1) + (10n_0 + n_2) + \ldots + (10n_5 + n_6),$$

делая группировку, имеем $S = k_0n_0 + k_1n_1 + \ldots + k_6n_6$ для некоторых коэффициентов $k_0, k_1, \ldots, k_6$. Поскольку n_i участвует в i числах как цифра единиц, в $6 - i$ числах как цифра десятков, то $k_i = 10(6 - i) + i = 60 - 9i$. Значит, все k_i делятся на 3. Но тогда и S должно делиться на 3. Однако 2009 не делится, следовательно Незнайка ошибся.

9.2. *На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно. Оказалось, что $BM + KD = MK$. Найдите угол MAK.*



К задаче 9.2.

Решение: Повернём треугольник AMB вокруг точки A на 90^o так, чтобы вершина B перешла в точку D (см. рисунок). Тогда точка M перейдёт в некоторую точку M' на продолжении CD. При этом $AM = AM'$ и $DM' = BM$, тогда $KM' = KD + DM' = KD + BM = KM$. Из равенств $AM = AM'$, $KM' = KM$ и общей стороны AK следует равенство треугольников AKM и AKM', откуда $\angle MAK = \angle MAM'/2$, но по построению $\angle MAM' = 90^o$, то есть $\angle MAK = 45^o$.

Ответ: $\angle MAK = 45°$.

9.3. *Пусть a, b, c, d, A, B, C, D — положительные числа.*

$$\alpha = \max\left(\frac{a+c}{A+C}, \frac{b+d}{B+D}\right), \quad \beta = \min\left(\frac{a+b}{A+B}, \frac{c+d}{C+D}\right).$$

Докажите неравенство $\alpha \geqslant \beta$.

Решение: Докажем лемму: Пусть x, y, X, Y — положительные числа. Тогда

$$\max\left(\frac{x}{X}, \frac{y}{Y}\right) \geqslant \frac{x+y}{X+Y} \geqslant \min\left(\frac{x}{X}, \frac{y}{Y}\right).$$

Из симметрии можно считать, что $\dfrac{x}{X} \geqslant \dfrac{y}{Y}$, откуда $xY \geqslant Xy$. Тогда $xX + xY \geqslant xX + Xy$, деля на $X(X+Y)$ получаем левое неравенство, правое следует аналогично из неравенства $yY + xY \geqslant yY + Xy$. Лемма доказана.

Два раза применяем лемму:

$$\alpha = \max\left(\frac{a+c}{A+C}, \frac{b+d}{B+D}\right) \geqslant \frac{(a+c)+(b+d)}{(A+C)+(B+D)} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D} =$$

$$= \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D} = \frac{(a+b)+(c+d)}{(A+B)+(C+D)} \geqslant \min\left(\frac{a+b}{A+B}, \frac{c+d}{C+D}\right) = \beta.$$

9.4. *Кот Матроскин как-то под Новый год разделил все действительные числа между собой и Шариком так, что*

1) сумма любых двух чисел Матроскина — число Матроскина;

2) сумма любых двух чисел Шарика — число Матроскина;

3) сумма любых числа Шарика и числа Матроскина — число Шарика.

Какие числа достались Шарику?

Решение: Пусть x — некоторое действительное число. Если $x/2$ — число Матроскина, то и x — число Матроскина; если $x/2$ — число Шарика, то x — число Матроскина. Следовательно все числа — числа Матроскина.

Ответ: Никакие.

9.5. *Известно, что произвольное действительное число a однозначно представимо в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ — целое число (целая часть числа a), а $\{a\}$ — дробная часть числа a, $0 \leqslant \{a\} < 1$.*

Про некоторое число x известно, что $\{32x\} = \{200x\}$, $\{2x\} = \{100x\}$. Докажите, что $\{x\} = \{155x\}$.

Решение: Из $\{32x\} = \{200x\}$ следует, что число $200x - 32x = 168x$ — целое. Аналогично, число $98x$ — целое. Тогда и $70x = 168x - 98x$ — целое, далее последовательно получаем, что числа $28x, 56x, 14x$ также целые. Теперь целым обязано быть и $154x = 11 \cdot 14x$, откуда числа x,$155x$ имеют одинаковые дробные части, что и требовалось доказать.

9.6. *Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы*

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(<u>Замечание.</u> Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).

Ответ: Это возможно: $7 \cdot (7 + 1 : 7)$.

10-й КЛАСС.

10.1. *Докажите, что если для действительных чисел a, b, c выполнены неравенства $a+b+c>0$, $ab+bc+ac>0$, $abc>0$, то все эти числа положительные.*

Решение: Способ 1. Пусть $s=a+b+c, r=ab+bc+ac, q=abc$. Раскроем скобки в многочлене $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, получим $P(x)=x^3-sx^2+rx-q$. Для всякого $x\leqslant 0$ имеем $x^3, -sx^2, rx\leqslant 0$, то есть $P(x)=x^3-sx^2+rx-q\leqslant -q<0$, в частности x не корень. Следовательно все корни $P(x)$ положительны, но по построению этими корнями являются a, b, c. Итак, $a, b, c>0$.

Способ 2. Пусть это не так, пусть хоть одно из них неположительно. В силу $abc>0$ нулей среди них нет. Следовательно имеются отрицательные. Вновь в силу $abc>0$ отрицательных чисел ровно 2, без ограничения общности можно считать, что это числа a, b. Тогда $c>-(a+b)$, $(a+b)c<-(a+b)^2$, $ab-(a+b)^2>ab+bc+ac>0$, то есть $ab>(a+b)^2$. Но это противоречит известному неравенству $(a+b)^2>2ab$, следовательно все числа a, b, c положительны.

10.2. *Вычислите значение выражения*

$$\min_{x\in[-1,1]}\left(\max_{y\in[-1,1]}\left(\min_{z\in[-1,1]}|x+y+z|\right)\right).$$

Решение. Обозначим выражение буквой A. Ясно, что $A\geqslant 0$. Докажем обратное неравенство $A\leqslant 0$.

Пусть

$$f(x)=\max_{y\in[-1,1]}\left(\min_{z\in[-1,1]}|x+y+z|\right).$$

Имеем

$$A=\min_{x\in[-1,1]}f(x)\leqslant f(0)=\max_{y\in[-1,1]}\left(\min_{z\in[-1,1]}|y+z|\right).$$

Полагая $z=-y$, получаем, что

$$g(y)=\min_{z\in[-1,1]}|y+z|=0$$

для любого $y\in[-1;\,1]$. Поэтому

$$\max_{y\in[-1,1]}g(y)=0,$$

и

$$A\leqslant f(0)=\max_{y\in[-1,1]}g(y)=0,$$

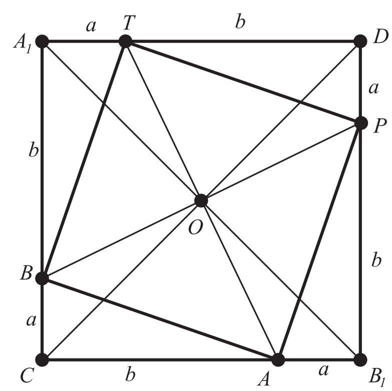
что и требовалось доказать.

Ответ: 0.

10.3. *Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники у которых зафиксирована вершина прямого угла, а сумма катетов является постоянной величиной (пусть для определённости она равна d). Найдите геометрическое место точек, каждая из которых является центром квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника вне его.*

Решение. Пусть C — зафиксированная вершина, O — одна из искомых точек, CAB — такой прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, что точка O — центр квадрата $ABTP$, построенного на AB во внешнюю сторону треугольника. Заметим, что при всевозможных поворотах вокруг точки C точка O пробегает окружность (с центром C радиуса OC), и любая точка этой окружности также удовлетворяет условию. Таким образом, геометрическое место точек — это объединение концентрических окружностей с центром в точке C. Найдём всевозможные значения радиусов этих окружностей. Пусть катеты AC и BC соответственно равны b и a. Отложим на лучах CB и CA точки A_1 и B_1 так, что $CA_1 = CB_1 = a + b = d$ и построим квадрат CA_1DB_1 — см. рисунок. Так как треугольники ABC и BA_1T равны ($AB = BT$, $AC = b = d - a = BA_1$, $\angle BAC = 90° - \angle CBA = 180° - 90° - \angle CBA = 180° - \angle TBA - \angle CBA = \angle A_1BC$), угол BA_1T — прямой, и точка T лежит на стороне A_1D квадрата CA_1DB_1. Аналогично, точка P лежит на стороне B_1D. Итак, квадрат $ABTP$ вписан в квадрат CA_1DB_1. Но тогда центры этих квадратов совпадают, и $CO = d\sqrt{2}$. Таким образом, радиусы всех окружностей равны. Так как их центры также одинаковы, отсюда следует, что окружность единственна.

Ответ: Окружность с центром в вершине прямого угла радиуса $d\sqrt{2}$.



К задаче 10.3.

10.4. *Юношей и девушек на балу было поровну. Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, либо с более умной, чем та, с которой он танцевал танго. А один юноша танцевал вальс с девушкой одновременно и более красивой и более умной. Могло ли такое быть?*

Решение: Например: пусть на балу было три девушки: Алла, Валя и Света. Пусть Алла красивее Вали, а Валя красивее Светы. Пусть Света — самая умная из девушек, а Валя — самая глупая. Пусть юношей зовут Андрей, Борис, Владимир. Пусть также танго Андрей танцевал с Аллой, Борис с Валей, а Владимир со Светой. Если теперь на вальс Андрей пригласит Свету (более умную), Борис — Валю (более красивую), а Владимир — Аллу (и более умную, и более красивую), то условие задачи будет выполнено.

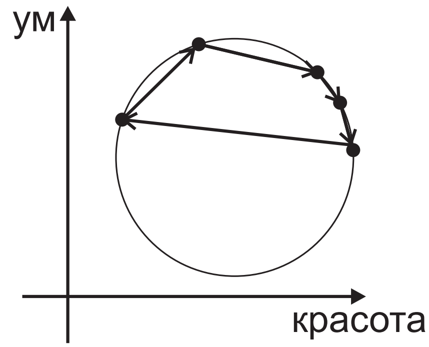
Ответ: Да, такая ситуация возможна.

Замечание. Задача допускает интересную геометрическую интерпретацию. Оценим красоту и интеллект каждой девушке каким-нибудь числом (не обязательно натуральным). Тогда каждой девушке будет соответствовать точка плоскости (абсцисса — красота, ордината — интеллект). Если некоторый юноша танцевал вальс с девушкой D_1, а танец перед вальсом — с девушкой D_2, проведём вектор $\overrightarrow{D_2D_1}$. Тогда задача выглядит следующим образом: можно ли расставить на плоскости несколько точек и соединить их векторами так, чтобы каждая точка была началом и концом ровно одного вектора, у каждого из векторов хотя бы одна координата была положительна, а ровно у одного были обе положительные координаты. Придумать такую конструкцию нетрудно, например, как на рисунке.

10.5. *Натуральное число назовем своим, если оно представимо в виде среднего арифметического квадратов рациональных чисел. Верно ли, что все натуральные числа свои? Решить задачу в предположении, что имеется ввиду среднее арифметическое*

а) в точности двух квадратов;

б) нескольких (возможно, одного) квадратов.



К задаче 10.4.

Решение: а) Покажем, что число 3 нельзя представить в виде среднего арифметического двух квадратов . Пусть число 3 является средним арифметическим двух квадратов рациональных чисел r_1, r_2. Рассмотрим эти числа в виде несократимых дробей $r_1 = s_1/q_1$, $r_2 = s_2/q_2$, а затем приведём их к общему знаменателю, взяв в качестве него $q = HOK(q_1, q_2)$. Тогда для $p_1 = qs_1/q_1$, $p_2 = qs_1/q_2$ имеем $r_1 = p_1/q$, $r_2 = p_2/q$ и $p_1^2 + p_2^2 = 6q^2$. Отсюда, если хотя бы одно из чисел p_1, p_2 не делится на 3, то сумма квадратов не будет делиться на 3. Следовательно они оба делятся на три. Но тогда $6q^2$ делится на 9, а значит q делится на 3. Теперь одно из чисел q_1, q_2 должно делиться на ту же степень тройки, что и q, пусть это q_1. Поскольку $p_1 = qs_1/q_1$ делится на 3, то s_1 должно делиться на 3. А это в свою очередь, противоречит несократимости дроби $r_1 = s_1/q_1$. Противоречие.

б) Пусть дано натуральное число x. Тогда для некоторого натурального n имеем $n^2 \leqslant x < (n+1)^2$. В силу $((n+1)^2 - n^2)x = (x - n^2)(n+1)^2 + ((n+1)^2 - x)n^2$ достаточно взять $x - n^2 \geqslant 0$ квадратов числа $n + 1$ и $(n + 1)^2 - x > 0$ квадратов числа n.

Ответ: а) нельзя, б) можно.

Замечание. Число 2 не является контрпримером к а) в силу $2 = ((\frac{6}{5})^2 + (\frac{8}{5})^2)/2$.

10.6 *Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “–”, “×”, “:”) так, чтобы*

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ *и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)*

Ответ: Это возможно: $7 \cdot (7 + 1 : 7)$.

11-й КЛАСС.

11.1. *Пусть x, y, z - действительные числа и $A = \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$. Найти наибольшее значение числа A.*

Решение: Выражение

$$B = 3 - 2A = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + \sin^2 z + \cos^2 z -$$

$$-2(\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x) = (\sin x - \cos y)^2 + (\sin y - \cos z)^2 + (\sin z - \cos x)^2,$$

неотрицательно (как сумма квадратов), однако может равняться нулю (например, при $x = y = z = \pi/4$). Следовательно 0 — его минимальное значение. Но тогда максимальное значение числа $A = (3 - B)/2$ равно $3/2$.

Ответ: $3/2$.

11.2. *Для двух бесконечных в обе стороны, возрастающих арифметических прогрессий $A = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $B = \{b_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ будем писать, что $B \sqsubseteq A$, если сумма любых двух членов прогрессии B — элемент прогрессии A. Пусть известно, что $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$.*

а) Докажите, что разности этих прогрессий равны.

б) Прогрессия A содержит число 2009. Укажите все действительные числа, которые не могут являться элементами B. Ответ обоснуйте.

Решение: а) Пусть $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$. Возьмём два соседних числа $a, a + d_A$ в прогрессии A, их сумма $2a + d_A$ есть в прогрессии B. Возьмём из A числа $a,\ a + 2d_A$, их сумма $2a + 2d_A$ есть в прогрессии B. Числа $2a + d_A$, $2a + 2d_A$ из B, следовательно их разность d_A кратна d_B, то есть $d_A = kd_B$ для целого k, но обе прогрессии возрастают, тогда $k > 0$, откуда $k \geqslant 1$ и $d_A \geqslant d_B$. Аналогично рассуждая имеем $d_B \leqslant d_A$.

б) Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество тех и только тех чисел, которые могут быть элементами B.

Пусть прогрессии A, B совпадают с целыми числами, тогда $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$ и в $\mathfrak{B}$ входят все целые числа. Рассмотрим произвольное натуральное число q. Поделим все члены из A, B на q, получим прогрессии $A_q,\ B_q$, тогда $2009 \in A_q$, а произвольные суммы из $A_q = B_q$ могут быть представлены в виде p/q, то есть содержатся в $B_q = A_q$. Отсюда $A_q \sqsubseteq B_q$, $B_q \sqsubseteq A_q$. Таким образом в $\mathfrak{B}$ входят все рациональные числа с произвольным знаменателем q. Тогда все рациональные числа входят в $\mathfrak{B}$.

Покажем, что других чисел там нет. Пусть $w \in \mathfrak{B}$, то есть для некоторых прогрессий A, B выполнено $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$, $2009 \in A$, $w \in B$. По уже доказанному они имеют одинаковую разность d. Тогда $4018 = (2009 - d) + (2009 + d) \in B$, то есть $4018 - w = kd$ для некоторого целого k. Аналогично $2w = (w - d) + (w + d) \in A$ и $2009 - 2w = ld$ для некоторого целого l. Теперь $6027 = 2(4018 - w) - (2009 - 2w) = (2k - l)d$, в частности d — рационально, тогда и $w = 4018 - kd$ также рационально. Таким образом все числа в $\mathfrak{B}$ рациональны.

Итак, множество $\mathfrak{B}$ есть множество рациональных чисел, тогда искомое — множество иррациональных чисел.

Ответ: б) Любые иррациональные числа.

<u>Замечание.</u> Легко видеть, что из $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$ не следует $A = B$, например $A = \{1 + 3n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $B = \{2 + 3m\}_{m=-\infty}^{\infty}$

11.3. *Докажите для всех различных положительных чисел a, b неравенство:*

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

Решение: Способ 1. Не ограничивая общности, пусть $b > a$ и $t = \dfrac{b}{a} > 1$. Неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{t} < \frac{t-1}{\ln t} < \frac{1+t}{2}, \quad \text{где} \quad t > 1. \qquad (*)$$

Пусть $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \ln t$. Имеем $f(1) = 0$, $f'(t) = \dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} \geqslant 0$, поэтому при $t \geqslant 1$ функция $f(t)$ возрастает. Значит, $\ln t < \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ при $t > 1$, и отсюда следует левое неравенство (*). С другой стороны, пусть $g(t) = \ln t + \dfrac{4}{t+1} - 2$. Тогда $g(1) = 0$, $g'(t) = \dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geqslant 0$ $(t > 0)$. Поэтому при $t > 1$ $g(t) > 0$, $\dfrac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$, и отсюда выводим правое неравенство (*).

Способ 2. Введем функции $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Отметим относительно них, что $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch}^2 z = 1 + \operatorname{sh}^2 z$.

В силу симметрии можно считать, что $a > b$. Делаем замену $x = \ln a, y = \ln b$ (при этом $x > y$). Получаем

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x - e^y}{x-y} < \frac{e^x + e^y}{2}.$$

Теперь при делении на $e^{\frac{x+y}{2}}$, имеем

$$1 < \frac{e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{y-x}{2}}}{x-y} < \frac{e^{\frac{x-y}{2}} + e^{\frac{y-x}{2}}}{2}.$$

Выражая все через $z = \frac{x-y}{2} > 0$ и функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ получаем эквивалентное исходному $1 < \frac{\operatorname{sh} z}{z} < \operatorname{ch} z$, или, что тоже самое,

$$z < \operatorname{sh} z < z \operatorname{ch} z, \quad z > 0.$$

Отметим, что при $z = 0$ это двойное неравенство превращается в равенство. Тогда достаточно проверить при $z > 0$ неравенство $z' < (\operatorname{sh} z)' < (z \operatorname{ch} z)'$, то есть $1 < \operatorname{ch} z < \operatorname{ch} z + z \operatorname{sh} z$, а оно следует из выполненных при $z > 0$ неравенств $\operatorname{sh} z > 0$, $\operatorname{ch} z = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z} > 1$.

Замечание. На самом деле, верно и более сильное неравенство

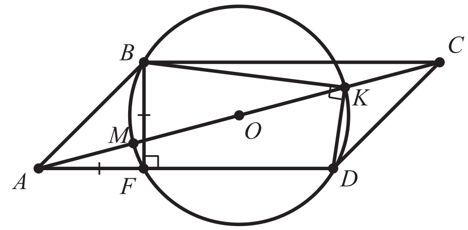
$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{1}{e}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{b-a}} < \frac{a+b}{2}.$$

Оно может быть доказано школьными методами сравнением функций $f(z) = \ln \frac{\operatorname{sh} z}{z} - \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$, $g(z) = \ln \operatorname{ch} z - \frac{z \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

11.4. *Острый угол параллелограмма $ABCD$ равен $45°$. На диагонали AC отмечена точка K, так что угол BKD равен $90°$. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению $AK \cdot KC$.*

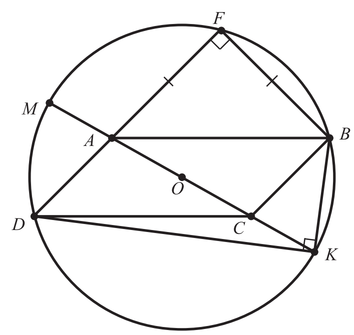
Решение. Способ 1. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Рассмотрим окружность ω с центром в точке O радиуса OB. Так как угол BKD — прямой, точка K лежит на рассматриваемой окружности; вторую точку пересечения этой окружности и прямой AC обозначим буквой M. Заметим, что в силу симметрии параллелограмма относительно точки O имеем $AM = CK$. В зависимости от того, какой из углов параллелограмма тупой, возможны два случая.

Случай первый: $\angle A = \angle C = 45°$. Тогда точка A лежит вне окружности ω. Пусть ω пересекает прямую AD второй раз в точке F — см. рисунок. Угол BFD — прямой, так как он вписан и опирается на диаметр, поэтому треугольник AFB прямоугольный. Угол A равен $45°$, поэтому $AF = FB$. Наконец, по свойству секущей имеем $AK \cdot AM = AF \cdot AD$. Но тогда $AK \cdot KC = AK \cdot AM = AF \cdot AD = BF \cdot AD = S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.



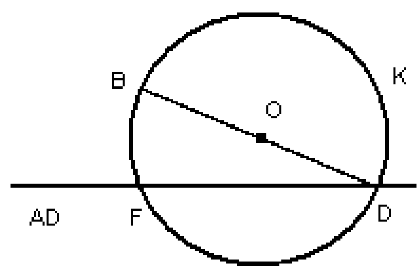
Способ 1. Первый случай

Случай второй: $\angle B = \angle D = 45°$. Тогда угол A — тупой, следовательно, точка A лежит внутри ω. Пусть F — точка пересечения прямой AD и ω — см. рисунок, ясно, что F лежит на продолжении стороны AD за точку A. Треугольник AFB — прямоугольный (так как угол AFB вписан в ω и опирается на её диаметр BD), равнобедренный (так как $\angle FAB = \angle FDC = 45°$), поэтому $AF = BF$. По свойству хорд $AD \cdot AF = AM \cdot AK$. Но тогда $AK \cdot KC = AK \cdot AM = AF \cdot AD = BF \cdot AD = S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.



Способ 1. Второй случай

Способ 2. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Рассмотрим окружность ω с центром в точке O радиуса OB. Если AD имеет отличную от D точку на ω, обозначим ее через M, тогда $\angle BFD$ вписан, опирается на диаметр, то есть $FB \perp AD$; если второй точки нет — примем $F = D$, при этом вновь $FB \perp AD$. Но угол между прямыми AB и AD равен $45°$, тогда $A \neq F$, откуда в прямоугольном треугольнике AFB угол $\angle BAF$ — острый. Тогда $\angle BAF = 45°$ и $\angle ABF = 90° - \angle BAF = \angle BAF$, то есть $AF = BF$, но BF является высотой в параллелограмме, откуда $S_{ABCD} = BF \cdot AD = AF \cdot AD$.



К задаче 11.4. Способ 2.

Так как $\angle BKD = 90°$, то точка K лежит на ω; диаметрально противоположную ей точку обозначим через M. Тогда точка M, как и точки O и K, лежит на прямой AC. Теперь по свойству секущей или свойству хорд (в зависимости от того вне или внутри окружности лежит точка A) имеем $AK \cdot AM = AF \cdot AD = S_{ABCD}$, но параллелограмм симметричен относительно точки O, отсюда $AM = KC$, то есть $S_{ABCD} = AK \cdot KC$, что и требовалось доказать.

Способ 3. Пусть $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AD}$, тогда $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}$. Заметим, что либо $\angle A = 45^o$, либо $\angle A = 135^o$, но в любом случае $|\cos\angle A| = \sin\angle A$, то есть $S_{ABCD} = |\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}|$.

Точка K на прямой AC, тогда для некоторого k выполнено $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{c}$, откуда $\overrightarrow{CK} = (1-k)\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{DK} = k\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{BK} = k\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$. В силу $\angle BKD = 90^o$ имеет место $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} - \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} - (k\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}) \cdot (k\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{c}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}) - k^2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} = k\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} - k^2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} = k\overrightarrow{c} \cdot (1-k)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{CK}$, то есть $S_{ABCD} = |\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}| = AK \cdot CK$.

Способ 4. Пусть O - точка пересечения диагоналей. Примем $\alpha = \angle AOB$, $x = AO = CO$, $r = BO = DO$, кроме того $OK = r$ как медиана в прямоугольном треугольнике, тогда и $AK = x + r$, $KC = |x - r|$.

Заметим, что $S_{ABCD} = 2xr\sin\alpha$, $AK \cdot CK = |x^2 - r^2|$ и осталось доказать, что $4x^2r^2\sin^2\alpha = (x^2 - r^2)^2$, то есть $2x^2r^2(1 + 2\sin^2\alpha) = x^4 + r^4$. Покажем это.

Трижды воспользовавшись теоремой косинусов имеем:

$$4r^2 = BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle A = (x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha) + (x^2 + r^2 + 2xr\cos\alpha) -$$

$$2\cos\angle A\sqrt{(x^2+r^2)^2 - 4x^2r^2\cos^2\alpha} = 2x^2 + 2r^2 - 2\cos\angle A\sqrt{(x^2+r^2)^2 - 4x^2r^2\cos^2\alpha}.$$

Таким образом, $\cos\angle A\sqrt{(x^2+r^2)^2 - 4x^2r^2\cos^2\alpha} = x^2 - r^2$.

Либо $\angle A = 45^o$, либо $\angle A = 135^o$, но $\cos^2\angle A = 1/2$. Возводя в квадрат получаем $x^4 + r^4 + 2x^2r^2 - 4x^2r^2\cos^2\alpha = 2x^4 + 2r^4 - 4x^2r^2$, то есть $2x^2r^2(3 - 2\cos^2\alpha) = x^4 + r^4$, откуда, в силу тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получаем требуемое.

11.5. *Почтальон Печкин поделил все действительные числа между котом Матроскиным и Шариком так, что*

1) произведение любых двух чисел Матроскина — число Матроскина;

2) произведение любых двух чисел Шарика — число Матроскина;

3) произведение любых числа Шарика и числа Матроскина — число Шарика.

Известно, что число $-\pi$ досталось Шарику. Кому достались остальные числа?

Решение: Пусть $x \geqslant 0$. Рассмотрим $y = \sqrt{x}$. Если y — число Матроскина, то и x — число Матроскина; Если y — число Шарика, то x — также число Матроскина. Следовательно все неотрицательные числа — числа Матроскина. Пусть $z < 0$. Поскольку $|z|/\pi$ — число Матроскина, число $z = (-\pi) \cdot (|z|/\pi)$ является числом Шарика.

Ответ: Шарику достались все отрицательные, Матроскину — все неотрицательные.

11.6. *Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий ("+", "–", "×", ":") так, чтобы*

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).

Ответ: Это возможно: $7 \cdot (7 + 1 : 7)$.