ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2009 — 2010 учебный год

6 — 7 класс

6 — 7.1. Из шляпы, содержащей 10 карточек с номерами от 1 до 10, пять мальчиков вытянули по две карточки (оставив шляпу пустой) и сообщили директору олимпиады сумму их номеров: Серёжа — 11, Федя — 4, Андрей — 7, Игорь — 16, Саша — 17. Может ли директор олимпиады однозначно установить номера карточек, которые вытащил каждый из мальчиков? Ответ обосновать.

6 — 7.2. Известно, что числа $x + y$ и $4x + y$ положительны. Может ли число $8x + 5y$ быть отрицательным? А число $2x + 5y$? Почему?

6 — 7.3. Какое наибольшее число уголков, состоящих из трех квадратиков 1×1, можно поместить в прямоугольник 5×7? Уголки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Ответ обосновать.

6 — 7.4. Роща состоит из 300 деревьев. Известно, что если пометить любые 201 из них, то среди помеченных деревьев непременно найдутся дуб, берёза и ель. Один чудак утверждает, что в таком случае роща состоит из 100 дубов, 100 берёз и 100 елей. Прав ли этот чудак? Ответ обосновать.

6 — 7.5. Герасим после прощания с Муму набрал в лодку очень много воды (более 10 литров). У него есть два ведра, одно вмещает ровно 5 литров, а про другое Герасим знает, что оно вмещает то ли ровно 3 литра, то ли ровно 4 литра. Помогите Герасиму вылить из лодки ровно 9 литров воды. Заглядывая в ведро, нельзя понять, сколько в нём воды.

6 — 7.6. Пять моряков на необитаемом острове насобирали кокосовых орехов. Потом они поделили орехи так: первый из них угостил орехом мартышку и взял ровно $1/5$ часть оставшихся орехов; точно также один за другим поступили и остальные 4 моряка, после этого они в шестой раз угостили мартышку одним орехом, а остальные поделили поровну (в процессе дележа все орехи оставались целыми). Определите, какое минимальное число кокосовых орехов могло быть собрано моряками. Ответ обосновать.

Решения будут доступны после 10.02.2010 на сайте http://acm.usu.ru

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2009 — 2010 учебный год

8 класс

8.1. Петя отпил 1/6 часть полной чашки чёрного кофе, а потом долил чашку до краёв молоком. Потом Петя отпил 1/3 часть чашки и опять долил доверху молоком. Наконец Петя выпил полную чашку. Чего Петя выпил больше: кофе или молока и во сколько раз? Ответ обоснуйте.

8.2. Вася участвовал в нескольких интернет-каруселях. Если бы на последней карусели он заработал 72 балла, то его средний балл за все эти карусели равнялся бы 83. А если бы на последней карусели он заработал 56 баллов, то его средний балл (также за все карусели) был бы 81. В скольких каруселях участвовал Вася? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

8.3. Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ так расположены на плоскости, что
1) их стороны соответственно параллельны, причём AB параллельна KN,
2) эти прямоугольники имеют непустое пересечение, однако вершины каждого из них не принадлежат другому,
3) ближайшей из вершин прямоугольника $KLMN$ к вершине A является точка K.

Докажите, что площадь четырёхугольника $ALCN$ равна площади четырёхугольника $KDMB$.

8.4. Про действительные числа a, b, c, d известно, что $ac-3bd = m$, $ad+bc = n$. Выразите $(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$ через m и n. Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

8.5. В остроугольном треугольнике ABC точка H — точка пересечения его высот. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB. Ответ обоснуйте.

8.6. Какое наибольшее количество коней можно поставить на изначально пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы каждый конь был под боем не более одного другого коня? Ответ обоснуйте.

Решения будут доступны после 10.02.2010 на сайте http://acm.usu.ru

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

среди школьников Свердловской области

2009 — 2010 учебный год

9 класс

9.1. В выражении
$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$
из 11 символов зачеркните ровно три так, чтобы значение этого выражения стало равно 2010.

9.2. Докажите, что для любых целых чисел x, y и z число
$$T = 2\Big(|(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)|+$$
$$+|x-y||y-z|+|y-z||z-x|+|z-x||x-y|\Big)$$
равно квадрату целого числа.

9.3. Расставьте на шахматной доске 8×8 наибольшее количество ладей так, чтобы каждая била ровно две других.

9.4. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника с целыми площадями. Докажите, что площадь четырёхугольника — составное число. (Натуральное число называется составным, если у него есть хотя бы один делитель, отличный от единицы и от него самого.)

9.5. Фирма «Рога и копыта» закупила счётную машинку, которая для любых введенных действительных чисел a и b может выполнить только одну операцию: вычислить число $1 - \dfrac{a}{b}$ (и выдать его на экран). Тем не менее, Остап Бендер научился выполнять на этой машинке все четыре арифметические действия. Как ему это удалось?

9.6. На плоскости изображён треугольник ABC.

а) С помощью циркуля и линейки проведите прямую, параллельную стороне AC, которая делит треугольник на два многоугольника равного периметра.

б) Решите аналогичную задачу для трапеции $ABFC$ ($BF \parallel AC$).

Решения будут доступны после 10.02.2010 на сайте http://acm.usu.ru

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2009 — 2010 учебный год

10 класс

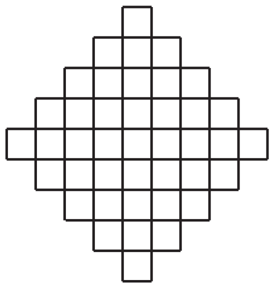
10.1. Известно, что $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant b$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+(b-y)^2}+\sqrt{y^2+(a-t)^2}+\sqrt{t^2+(b-z)^2}+\sqrt{z^2+(a-x)^2} \leqslant 2(a+b).$$

10.2. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию: $x_n + x_{n+2} = x_{n+1}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он знает одно замечательное натуральное число m, при котором для любого натурального числа n имеет место равенство $x_{n+m} = x_n$. Не заврался ли барон?

10.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM угла B. На стороне CB отметили такую точку N, что $\angle CAN = \angle ABM$. Докажите, что отрезки AM и MN равны.

10.4. Точка M лежит на окружности, описанной около данного равностороннего треугольника ABC. Докажите, что величина $MA^4+MB^4+MC^4$ не зависит от выбора точки M.



10.5. а) Расставьте на шахматной доске 8×8 наибольшее количество ладей так, чтобы каждая била ровно две других.

б) Какое наибольшее количество слонов можно расставить на изображённой на рисунке доске так, чтобы каждый слон бил ровно двух других? Приведите пример такой расстановки и докажите, что большего числа слонов расставить требуемым образом нельзя.

10.6. На множестве действительных чисел введена операция, которая каждой паре чисел x и y ставит в соответствие число $x \circ y$, и при этом для любых чисел x, y, z имеют место равенства:

1) $(x+y)\cdot(x\circ y) = x^2 \circ y^2$,

2) $x \circ y = (x+z)\circ(y+z)$,

3) $1 \circ 0 = 1$.

Выразите эту операцию через четыре арифметических действия. Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Решения будут доступны после 10.02.2010 на сайте http://acm.usu.ru

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2009 — 2010 учебный год

11 класс

11.1. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 6 совершенное, так как $6 = 1 + 2 + 3$.)

Докажите, что:

а) число 2010 не является совершенным числом,

б) число 2010^2 не является совершенным числом,

в) число n^2 не является совершенным числом ни для какого натурального n.

11.2. Найти все такие натуральные числа k, для каждого из которых выражение $\sin kx \cdot \sin^k x - \cos kx \cdot \cos^k x + \cos^k 2x$ не зависит от x.

11.3. Дан треугольник ABC. На лучах BA и CA вне треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 такие, что $AA_1 = AA_2 = BC$. Аналогичным образом получены точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 ($BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$). Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 принадлежат одной окружности (окружности Конвея).

11.4. Найдите наименьшее значение величины $P = \max\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, где $p_1 = x_1+x_2+x_3$, $p_2 = x_2+x_3+x_4$, $p_3 = x_3+x_4+x_5$, $p_4 = x_4+x_5+x_6$, $p_5 = x_5+x_6+x_7$, если все $x_i \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 1$.

11.5. На множестве действительных чисел $\mathbf{R}$ введена операция $x \circ y$ такая, что для любых чисел x, y, z имеют место равенства:

1) $x \circ y = y \circ x$,

2) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

3) $(cx) \circ (cy) = c(x \circ y)$ для любого $c > 0$,

4) выражение $(x + z) \circ (y + z) - (x \circ y)$ зависит только от z и не зависит от x и y.

Выразите эту операцию через четыре арифметических действия и операцию взятия модуля. Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

11.6. На доске 7×7 расставьте 24 рыцаря и 25 лжецов (по одному в единичную клетку) так, чтобы каждый из них мог сказать: «Рядом со мной стоит ровно один рыцарь». Как обычно, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Люди считаются стоящими рядом, если у занимаемых ими клеток есть общая сторона.

Решения будут доступны после 10.02.2010 на сайте http://acm.usu.ru