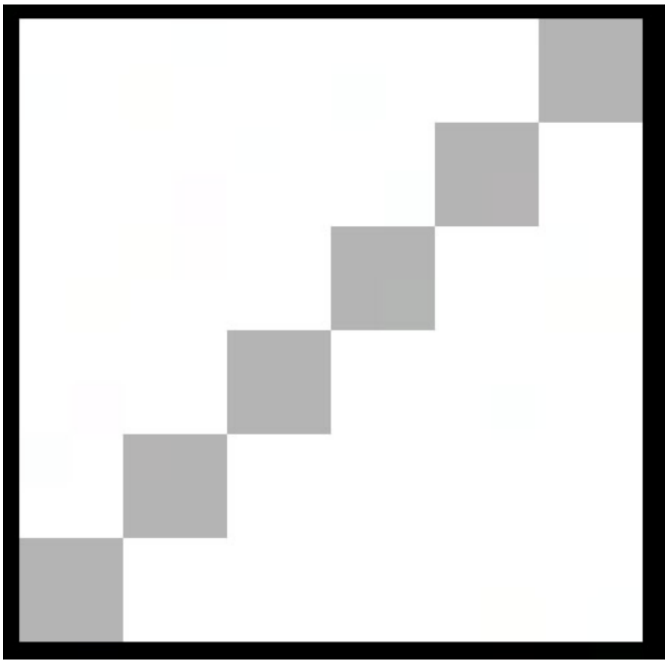
Задача A. Сбор кристаллов

В задаче требовалось найти, кто больше собрал кристаллов. Так как они собирают по 1 кристаллу за минуту, значит, Венди успела собрать x кристаллов, а Стэн собрал y кристаллов. Далее остается только сравнить числа x и y и, в зависимости от этого, вывести ответ.

Задача B. Волшебное поле

Заметим следующий факт: если $k \geqslant n$, то ответ «YES», так как можем расставить n шишек по диагонали, и спустя n секунд они заполнят всё поле.



Осталось доказать, что если $k < n$, то ответ «NO». Рассмотрим суммарный периметр по всем связанным областям. Заметим, что при добавлении клетки он не меняется. Суммарный периметр после расстановки не превосходит $4k$, а у полностью заполненного поля он равен $4n$. Периметр не меняется и всегда меньше $4n$, следовательно, не можем заполнить всё поле.

Задача C. Дневник Форда

Пусть таблица имеет размер $n \times m$. Найти оптимальную раскраску значит найти раскраску, в которой будет как можно меньше белых клеток. Покажем, что в оптимальной раскраске будет $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ белых клеток.

Оценка:

Нарисовав горизонтальные и вертикальные линии после 2-й, 4-й, 6-й и т. д. клеток, мы разрежем таблицу на квадраты 2×2. Всего таких квадратов получится $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, и по условию в каждом из них должна быть хотя бы одна белая клетка.

Пример:

Пронумеруем координаты клеток, начиная с единицы. Покрасим в белый клетки, у которых обе координаты чётные, а все остальные клетки - в чёрный. Тогда очевидно, что в каждом квадрате 2×2 будет ровно одна белая клетка. При этом мы покрасили в белый ровно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ клеток, значит такая раскраска оптимальна.

Задача D. Деление

Заметим, что если все координаты нужно уменьшить на число x, то точка с координатой x переместится в точку с координатой 0, где должна располагаться Хижина Чудес. Следовательно, в точке с координатой x не должно быть отмеченных точек, и с обеих сторон от точки с координатой x должно быть одинаковое количество отмеченных точек. То есть задача состоит в том, чтобы найти число x, которое отличается от всех n чисел, при этом $n/2$ чисел должны быть меньше x, и $n/2$

чисел – больше x. Из этого сразу следует, что если n нечетно, то числа не существует, то есть ответ «Impossible».

Для того, чтобы найти нужное число, отсортируем все числа, рассмотрим 2 средних из них – пусть это числа a и b. Наше число должно располагаться строго между ними, следовательно, если $a = b$, то подходящего числа не существует, а иначе число $(a + b)/2$ подойдет, либо любое другое число, удовлетворяющее условию $a < x < b$.

Задача E. Весёлые гонки

Заметим, что каждая свинка через время t проедет расстояние минимум $\max(t - d_i, 0) \cdot v_i$ и максимум $t \cdot v_i$. Получается, что через время t свинка под номером i может оказаться в любой точке из отрезка $[\max(t - d_i, 0) \cdot v_i, t \cdot v_i]$. Из этого следует, что нам надо найти такую точку, что лежит во всех отрезках. Для этого пересечем их. Пересечение будем находить таким образом: начальная точка нашего пересечения отрезков будет максимумом среди начальных точек всех наших отрезков $begin = \max_{i \in 1 \ldots n} \max(t - d_i, 0) \cdot v_i$, а конечная будет минимумом среди всех концов наших отрезков $end = \min_{i \in 1 \ldots n} t \cdot v_i$. Тогда наше пересечение будет непустым только тогда, когда начало лежит раньше конца $begin \leqslant end$.

Задача F. Угадай, кто?

Сопоставим каждому существу u число $D(u) = 1$, если u - мужикотавр, и $D(u) = 0$, если u - гном. Построим неориентированный граф, где существа являются вершинами.

Пусть существо u сказало фразу «Существо v гном», тогда проведём в графе ребро из u в v и напишем на этом ребре число 1. Пусть существо u сказало фразу «Существо v мужикотавр», тогда проведём в графе ребро из u в v и напишем на этом ребре число 0.

Тогда если на ребре между u и v написано число w, то тогда $D(u) \oplus D(v) = w$. В этом легко убедиться разобрав всего 4 случая:

Существо u	Фраза существа u	Существо v
Мужикотавр	"Существо v мужикотавр"	Мужикотавр
Мужикотавр	"Существо v гном"	Гном
Гном	"Существо v мужикотавр"	Гном
Гном	"Существо v гном"	Мужикотавр

Таким образом, если мы знаем $D(u)$ для какой-то вершины, мы знаем $D(v)$ для соседней с ней вершины v.

Рассмотрим в полученном графе любую компоненту связности. Выберем любую вершину s этой компоненты. Если предположить, что $D(s) = 1$, то с помощью dfs можно восстановить числа, написанные во всех остальных вершинах компоненты. Если предположить, что $D(s) = 0$, то в этой компоненте все числа 0 заменятся на 1, а все числа 0 на 1.

Таким образом, если в какой-то компоненте можно расставить 0 и 1, то это можно сделать ровно двумя способами.

Получаем следующее решение: попробуем раскрасить каждую компоненту графа с помощью dfs. Если это сделать не получилось, то ответ на задачу 0. Если это сделать получилось, то каждую компоненту можно раскрасить двумя способами, а значит ответ на задачу $2^C \, mod \, 10^9 + 7$, где C - количество компонент связности.

Примечание: $\oplus$ - операция исключающее "или"

Задача G. Подарок для Мейбл

Немного формализируем исходную задачу. На самом деле нам требуется найти k последовательных чисел, домножить некоторые из них на -1, а затем просуммировать так, чтобы в итоге получилось число s.

Для начала давайте разберемся, когда ответ «Impossible». Заметим, что, если k четное, то какие бы k последовательных чисел мы не выбрали, четность итоговой суммы будет равна четности числа $\frac{k}{2}$. Поэтому если четность s и $\frac{k}{2}$ не совпадает, то ответ «Impossible». Во всех остальных случаях мы всегда можем выбрать k последовательных элементов так, чтобы удовлетворить условиям задачи.

В случае, если k четное, то можно взять числа, начиная с числа $\frac{s-5\cdot\frac{k}{2}+4}{2}$. Все числа с нечетным номером, кроме предпоследнего, домножим на -1. Такая сумма в действительности будет равна s.

Если же k нечетное, то можно взять числа, начиная с числа $s+1-k-\frac{k-1}{2}$. Все числа с нечетным номером, кроме последнего, домножим на -1.

Задача H. Билл захватывает сознание!

Давайте считать динамику $dp[i]$ — максимум удачливости на префексе i. Если бы не было телепортов, то был бы всего лишь один переход: $dp[i] = dp[i-1] + a[i]$. Но так как есть еще и телепорты, то возможен переход $dp[i] = prefmax[i] + a[i]$, где $prefmax[i]$ — максимум из значений $dp[j]$, где $j < i$ и j это телепорт. В свою очередь $prefmax[i]$ пересчитывается так: $prefmax[i] = prefmax[i-1]$ или $prefmax[i] = dp[i-1]$, $i-1$ — телепорт.

Задача I. Заклинание

Первое важное замечание заключается в том, что последняя цифра числа после применения заклинания (возведения в квадрат) зависит только от последней цифры этого числа. Поэтому для решения задачи можно сосредоточиться только на последних цифрах чисел a и b.

Далее стоит отметить, что если возможно получить одинаковые последние цифры, то минимальное количество операций, которое потребуется, не может превышать двух. Это связано с тем, что последовательности последних цифр при возведении в квадрат для любого числа либо не меняются, либо зацикливаются через не более чем 2 заклинания.

Поэтому для каждого из чисел можно перебрать возможные варианты последних цифр после одной и двух операций возведения в квадрат. Если для какого-то набора операций получится одинаковая последняя цифра для обоих чисел, это и будет решением задачи. Если же такие цифры не совпадут даже после двух операций, следует вывести -1, так как достичь одинаковых последних цифр невозможно.