# Задача A. Соревнование трёх

Для решения первой группы тестов ($n \leqslant 50$) достаточно перебрать для первых двух участников, сколько каждый из них занял первых мест и сколько — вторых. Тогда остальные значения (количество мест у каждого участника) считаются однозначно и, тем самым, мы получим количество очков победителя. Сложность алгоритма $O(n^4)$.

Для решения полной задачи нужно заметить, что практически всегда мы можем добиться оптимального результата, то есть победитель наберет $\lceil \frac{sum}{3} \rceil$, где $sum$ — суммарное количество очков участников. Действительно, можно сначала раздать каждому из участников по $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ первых, вторых и третьих мест. Далее у нас может остаться еще 1 или 2 этапа. Разность очков, полученную на этих двух этапах, можно исправить, меняя вторую позицию на третью у победителя (разница с предыдущим местом изменится на 2 очка). Таким образом, формула верна при $n \geqslant 4$. Несложно проверить, что эта же формула подходит и для случаев $n = 2$, $n = 3$.

# Задача B. Ленивые голубцы

Для решения первой группы тестов ($n \leqslant 10^9$) можно промоделировать, сколько должен пробежать каждый голубец. Поскольку мы получим арифметическую прогрессию, то сумма ее элементов будет расти квадратично от длины. Таким образом, максимальный ответ не будет превосходить $O(\sqrt{n})$.

Для написания более быстрого решения можно воспользоваться алгоритмом бинарного поиска по ответу. Действительно, чем больше голубцов, тем больше расстояние суммарно они должны пробежать. При фиксированном числе голубцов $c$ мы получим сумму арифметической прогрессии $s_c = \frac{c \cdot (1 + (1 + k \cdot (c-1)))}{2}$, и эта сумма должна быть не больше значения $s$ из входных данных. Таким образом, оптимальное значение $c$ можно найти за $O(ln(s))$ операций. При этом в последней подгруппе тестов можно получить переполнение 64-битного типа данных. Чтобы избежать этой ситуации, можно либо воспользоваться 128-битными (или более) типами данных, или заменить умножение делением (сделать замену выражения $a \cdot b \leqslant c$ на $a \leqslant \frac{c}{b}$).

# Задача C. Правильные тройки

Для первой группы тестов достаточно перебрать все тройки чисел $a$, $b$, $c$ и для каждой проверить, выполняется ли хотя бы одно из требуемых равенств.

Для второй группы можно перебрать пары чисел $a$, $b$. Тогда мы получим два возможных значения $c$, которые нужно проверить (выполняется ли условие $1 \leqslant c \leqslant n$). Тут также важно не забыть, что при равенстве значений нужно учитывать только одно из них.

Для увеличения скорости работы стоит перебирать значение $c$ вместо пары значений $a$ и $b$. При этом для каждого $c$ количество решений уравнения $a + b = c$ будет ровно $(c - 1)$ (слагаемое $a$ может принимать значения от 1 до $c - 1$). Для подсчета количества решений уравнения $a \cdot b = c$ необходимо найти количество делителей числа $c$. В третьей подзадаче это можно сделать за $O(\sqrt{c})$, находя список делителей для каждого числа независимо. Для полного решения нужно воспользоваться более эффективным алгоритмом, например, для каждого числа от 1 до $n$ перебрать все числа, которые на него делятся по аналогии с алгоритмом решета Эратосфена. Сложность решения будет $O(n \cdot ln(n))$. Существуют и более простые реализации полного решения задачи.

Отметим, что для значения $c = 4$ мы получим сразу два решения: $2 + 2 = 4$ и $2 \cdot 2 = 4$. Поэтому при $n \geqslant 4$ ответ надо уменьшить на 1.

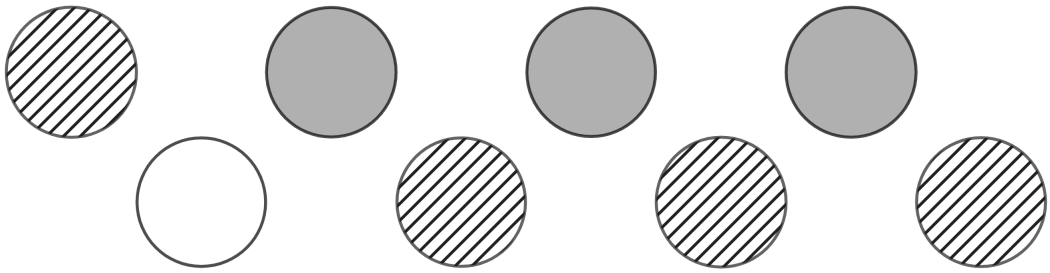
# Задача D. Пила

Заметим, что можно сразу отсортировать данное множество чисел и взять наибольшие $\frac{n}{2}$ элементов на нечетные позиции, а остальные — на четные. При этом число на нечетной позиции всегда будет больше соседних чисел на четных позициях, за исключением случая равенства двух чисел.

Для решения задачи при $n \leqslant 16$ можно перебрать все подмножества чисел, которые мы будем изменять. Для каждого подмножества можно попробовать собрать пилообразную последовательность при помощи жадных алгоритмов.

Для эффективного решения задачи можно заметить следующее — последовательность является почти пилообразной тогда и только тогда, когда каждый элемент в ней встречается не более $\frac{n}{2}$ раз.

Действительно, даже если какой-либо элемент $x$ встречается ровно $\frac{n}{2}$ раз, то мы можем расположить числа в требуемую последовательность следующим образом:



заштрихованные элементы равны $x$, серые элементы больше $x$, белый элемент меньше $x$

Несложно видеть, что если какое-то число $x$ встречается больше $\frac{n}{2}$ раз, то два таких числа будут соседями и пилообразную последовательность собрать нельзя. Тогда для каждого числа достаточно посчитать, сколько раз оно встречается в исходном массиве и если какое-то число встречается $k > \frac{n}{2}$ раз, то ответ на задачу будет $k - \frac{n}{2}$, в противном случае мы можем собрать последовательность без изменений. Этот подход можно реализовать с асимптотической сложностью $O(n \cdot ln(n))$, например, воспользовавшись стандартным контейнером $std :: map$ (в C++).

# Задача E. Оптимальное наложение

Для начала рассмотрим вторую подзадачу. Всего существует не более $O(n^2)$ различных наложений. Чтобы вычислить минимальный путь для конкретного наложения, применим метод динамического программирования, а именно посчитаем $dp[i][j]$ — величину минимального пути до клетки $(i, j)$. Пересчитывать такую динамику можно следующим образом:

$$dp[i][j] = c[i][j] + min(dp[i-1][j], dp[i][j-1])$$

где $c[i][j]$ — это объединённая таблица. Также нужно аккуратно посчитать значения $dp[0][j]$ и $dp[i][0]$. В результате итоговая асимптотика для этой подзадачи составит $O(n^4)$.

Перейдём к решению третьей подзадачи. Для начала вычислим для каждой клетки таблицы $B$ минимальный путь от верхней левой клетки, а для каждой клетки таблицы $A$ — минимальный путь от нижней правой клетки. Теперь рассмотрим произвольное наложение и минимальный путь в нём. Этот путь равен сумме минимального пути до некоторой «краевой» клетки таблицы $B$ и минимального пути до следующей клетки пути в таблице $A$. Таким образом, достаточно перебрать все пары: «краевая» клетка таблицы $B$ и следующая клетка пути в таблице $A$. Общее количество таких пар составляет $O(n^3)$.

Для решения задачи на полный балл потребуется оптимизировать подход из предыдущей подзадачи. На самом деле для каждой краевой клетки таблицы $B$ нужно найти оптимальную клетку перехода в таблице $A$, т.е. такую клетку, для которой расстояние от нижней правой клетки минимально. Это сводится к задаче поиска минимума в $dp_A$ на прямоугольнике определённого вида. Для ускорения выполнения этой операции можно воспользоваться префиксными максимумами, рассчитанными из клетки $(1, n)$ и из клетки $(n, 1)$. В результате итоговая асимптотика решения составит $O(n^2)$.

# Задача F. Пат ладьями

Для ответа на первую подгруппу можно написать полный перебор вариантов — для каждой из 4 фигур будет $n^2$ вариантов, где она может расположиться. Сложность может возникнуть при переборе вариантов, где король нападает на незащищенную ладью. Асимптотика $O(n^8)$.

Далее будем рассматривать общее решение. Для вариантов, когда король находится в углу — количество расположений нужно умножать на 4 (так как на доске 4 угловые клетки). Когда король

стоит у стенки — умножать на $4 \cdot (n-2)$. Когда король не находится в углу или у стенки – домножать на $(n-2) \cdot (n-2)$.

Для решения подгруппы $k = 2$ нужно рассмотреть 2 случая — первый, когда король находится в углу, и второй, когда король находится на краю доски. Варианта поставить пат двумя ладьями, когда король находится не у края — нет.

Рис.1 — $(n-2) \cdot (n-2)$

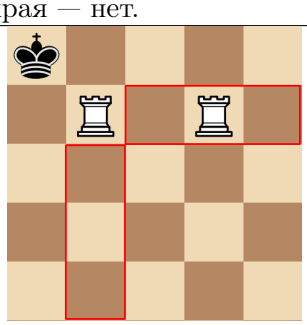


Рис.2 — $2 \cdot (n-2)$

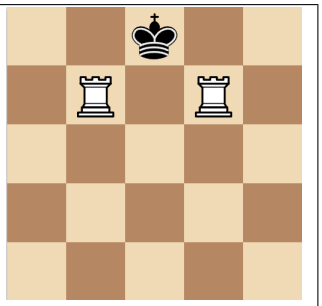


Рис.3 — 1

- Рисунок 1. Король в углу, ладья не под боем. Количество вариантов, куда поставить каждую ладью $(n-2)$, ладьи две, а значит общее количество в этом варианте — $(n-2) \cdot (n-2)$.
- Рисунок 2. Король в углу, ладья под боем. Одна ладья зафиксирована, а вторая может встать на любую клетку из красной области, а их — $2 \cdot (n-2)$.
- Рисунок 3. Король у стенки. В таком варианте есть единственное расположение ладей для пата.

Для решения при $k = 3$ рассмотрим сначала варианты, когда король в углу.

Рассмотрим случай, когда одна ладья под боем (её расположение можно выбрать единственным образом).

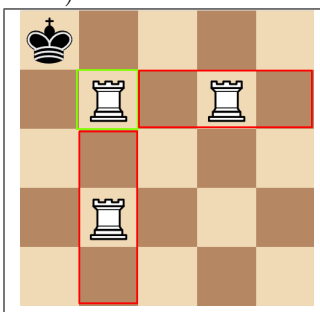


Рис.1 — $(n-2) \cdot (n-2)$

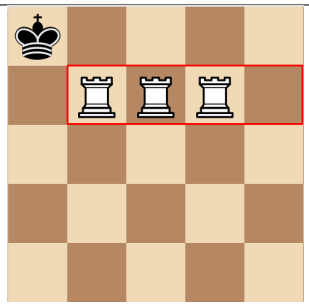


Рис.2 — $(n-2) \cdot (n-3)$

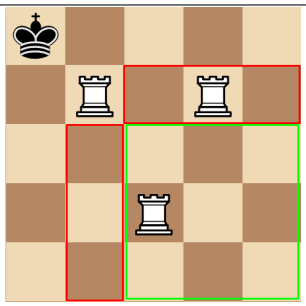


Рис.3 — $2 \cdot (n-2) \cdot (n-2)^2$

- Рисунок 1. Вторую ладью ставим на вертикаль, третью на горизонталь. У каждой по $(n-2)$ свободных клеток.
- Рисунок 2. Все ладьи на одной линии. Тогда количество способов расставить две оставшиеся ладьи — $C^2_{n-2} = (n-2) \cdot (n-3)/2$. Домножаем на 2, так как можно расположить так по вертикали и по горизонтали.
- Рисунок 3. Вторая ладья защищает первую $2 \cdot (n-2)$, а третья может расположиться на любой клетке зеленой области $(n-2)^2$.

Теперь ни одна ладья не будет под боем, а значит две ладьи должны перекрывать вертикаль и горизонталь. Первую и вторую ладью можно расставить $(n-2)$способами каждую:

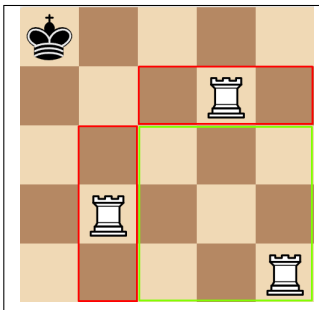


Рис.4 — $(n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-2)^2$

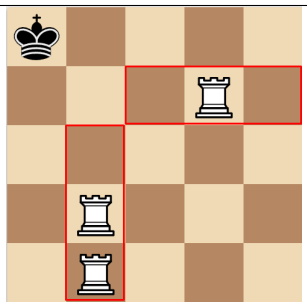


Рис.5 — $(n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-3)$

- Рисунок 4. Третья ладья стоит в свободном зеленом квадрате $(n-2)^2$.
- Рисунок 5. Пусть третья ладья защищает вторую, тогда общее число способов расставить ладьи — $C^1_{n-2}\cdot C^2_{n-2} = (n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-3)/2$. Домножаем на 2, так как третья ладья может защищать как вторую, так и первую.

Вариант, когда король у стенки:

Теперь ни одна ладья не будет под боем, а значит две ладьи должны перекрывать вертикаль и горизонталь. Первую и вторую ладью можно расставить $(n-2)$способами каждую:

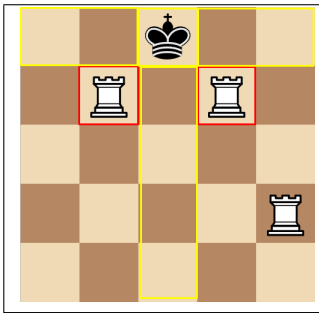


Рис.1 — $n^2-2\cdot n-1$

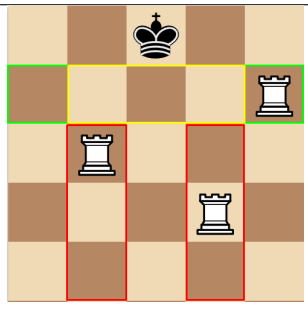


Рис.2 — $(n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-3)$

- Рисунок 1. Первая и вторая ладья зафиксированы под боем. Третью можно расположить в любой незакрашенной клетке $n^2-(2\cdot n-1+2)$.
- Рисунок 2. Ни одна ладья не будет под боем. Тогда первую и вторую нужно расположить так, чтобы они перекрывали две боковые линии для короля, а третью чтобы она перекрывала горизонтальную линию. Первую и вторую ладью можно расставить $(n-2)$ способами каждую, а третью $(n-3)$ способами.

И разберём случаи, когда одна ладья под боем, способов расставить первую ладью — 2.

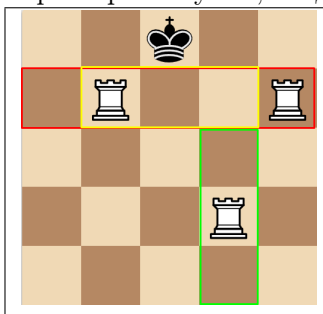


Рис.3 — $2\cdot(n-2)\cdot(n-3)$

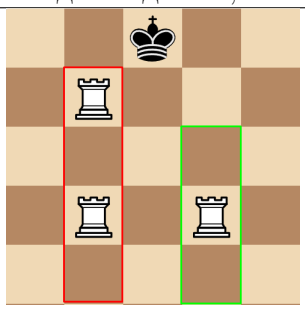


Рис.4 — $2\cdot(n-2)\cdot(n-2)$

- Рисунок 3. Пусть вторая ладья защищает первую на горизонтальной линии, тогда её можно расположить $(n-3)$ способами. А третья ладья должна перекрывать вторую вертикальную линию $(n-2)$ способами.
- Рисунок 4.Теперь вторая ладья защищает первую на вертикальной линии $(n-2)$ способами, а третью ладью всё также ставим перекрывать вторую вертикальную линию $(n-2)$ способами.

И последний случай, когда король находится внутри поля.

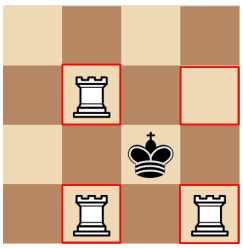


Рис.1 — 4

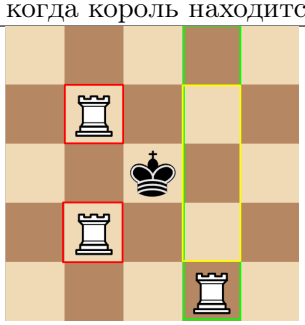


Рис.2 — $4 \cdot (n-3)$

- Рисунок 1. Расставим ладьи вокруг короля. Всего $C_4^3 = 4$ способа это сделать.
- Рисунок 2. Первую и вторую ладью можно выбрать единственным способом, а третью $(n-3)$ способами. Домножаем на 4, так как можно сделать повороты на 90 градусов.

# Задача G. Бегуны и препятствия

Для того чтобы решить данную задачу было необходимо заметить, что в один момент времени с одной стороны в препятствие не может попасть 2 спортсмена одновременно. Доказательство этого факта остается в качестве упражнения читателю.

Далее необходимо понимать а в какие препятствия каждый спортсмен врезался. Для этого давайте хранить в каких позициях спортсмены начали гонку и в каком направлении они бегут. Тогда если появилось очередное препятствие в позиции $x$ в момент времени $t$, то он должен будет стартовать в позиции $(x-t) \mod n$ (Все позиции мы считаем в 0-индексации). Тогда для этой позиции мы можем определить спортсмена и сказать, что он попал в это препятствие. И тогда нам остается пересчитать его движение в противоположном направлении. Тогда на самом деле такое столкновение спортсмена с препятствием равносильно его старту из позиции $(x+t) \mod n$. Аналогично мы можем сделать при движении против часовой стрелки. Данная часть решения может работать за $O(m \log m)$ от сортировки.

Теперь для каждого спортсмена мы знаем в какие препятствия он попадал. Далее давайте поймем, что нам не важно в какой позиции он попал в препятствие, а нам важен только сам факт попадания в него. Давайте представим, что наш спортсмен бежит не по кругу, а по прямой. Тогда в зависимости от времени между столкновениями с препятствиями будем поддерживать насколько далеко от 0 в обе стороны он смог убежать. Тогда если с расстояния отрезка до которого мы смогли добежать больше или равно $n$, то это значит, что мы пробежали весь круг. Тогда давайте искать ответ, например, бинарным поиском по времени сколько он будет бежать. Тем самым наше решение будет работать за $O((n+m)\log(T))$.