X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2010 — 2011 уч.г.

Решения задач

Составители задач: Шевалдин В.Т., Нохрин С.Э., Хлопин Д.В.

Сайт олимпиады: http://acm.usu.ru

5 — 6 КЛАСС

(**5—6.1**) *В пакете 9 кг крупы. Как при помощи чашечных весов и единственной гири весом 200 г за три взвешивания отмерить ровно 2 кг крупы?*

Решение. Первым взвешиванием положим на одну из чашек весов гирю, а всю крупу разложим на чашки весов так, чтобы последние уравновесились. Так как общая масса взвешиваемого равна 9,2 кг, то на каждой чашке весов будет вес 4,6 кг. Теперь уберём крупу с чашки, где гири не было, обратно в мешок, снимем гирю, а всю оставшуюся крупу (её, конечно, останется 4,4 кг) разложим на обе чашки так, чтобы весы пришли в состояние равновесия (это второе взвешивание). Ясно, что сейчас на каждой чашке по 2,2 кг. Теперь уберём всю крупу с одной из чашек в мешок, поставим на эту чашку гирю, и на другой чашке весов оставим столько крупы, сколько эта гиря весит, т.е. 0,2 кг (третье взвешивание). Вся крупа, снятая со второй чашки, весит тогда ровно $2,2 - 0,2 = 2$ кг.

(**5—6.2**) *Имеется 5 электрических розеток и 10 тройников. Какое наибольшее число электроприборов можно включить в сеть с их помощью? (Суммарное количество включённых в каждый тройник электроприборов и тройников не более трёх, а в розетку может быть включён или один тройник, или один электроприбор, или ничего.)*

Решение. Если не использовать тройники, то электроприборов можно включить столько, сколько розеток. Подключая очередной тройник, мы занимаем одно из мест включения прибора, но добавляем три новых места, поэтому максимальное число включённых приборов увеличивается на 2. В результате находим, что наибольшее число электроприборов равно $n + 2m$, где n — число розеток, m — число тройников. В конкретном нашем случае имеем $5 + 2 \cdot 10 = 25$.

ОТВЕТ: 25.

(**5—6.3**) *Билет с шестизначным номером назовём почти счастливым, если сумма каких-либо трёх его цифр равна сумме трёх оставшихся. Рома и Миша взяли в троллейбусе два билета с подряд идущими номерами, и оба билета оказались почти счастливыми. Докажите, что среди 12 цифр этих билетов обязательно встретится цифра 0.*

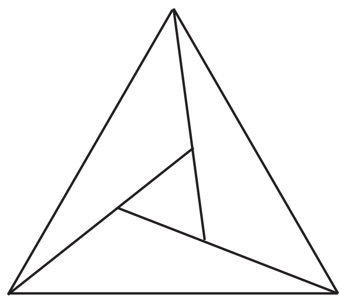
Решение. Пусть билет является почти счастливым. Тогда его цифры можно распределить в две группы, сумма в которых будет одной и той же, скажем, S. Тогда сумма всех цифр билета равна $2S$ — число чётное. Это значит, что среди цифр билета нечётных цифр чётное количество. Если при этом последняя цифра номера не равна 0, то предыдущий билет имеет первые 5 цифр те же самые, а последнюю — на 1 меньше. Значит, количество чётных цифр изменилось на 1 (неважно, уменьшилось или увеличилось). В результате в предыдущем билете нечётное количество нечётных цифр, т.е. он не будет счастливым. Вывод: в приобретённом Ромой и Мишей билете с большим номером последняя цифра равна 0. Ситуация, описанная в условии, возможна: например, номера билетов 220369 $(2 + 3 + 6 = 2 + 9 + 0))$ и 220370 $(2 + 2 + 3 = 7 + 0 + 0))$. Утверждение задачи доказано.

(**5—6.4**) *На столе лежат 20 одинаковых монет: 5 орлом вверх и 15 орлом вниз. От вас требуется разложить все монеты в две кучки (возможно, перевернув некоторые из монет) так, чтобы в первой и второй кучках было одинаковое число монет, лежащих орлом вверх. При этом у вас завязаны глаза, поэтому вы не можете видеть, как именно лежат монеты, а на ощупь отличить решку от орла вы тоже не можете.*

Решение. Возьмём любые 5 монет и образуем из них первую кучку, перевернув все 5. Остальные монеты образуют вторую кучку (их не переворачиваем). Покажем, что таким образом мы решим задачу. Действительно, пусть в первой кучке орлом вверх оказались m монет. Тогда остальные монеты (их $5-m$ штук) — это в точности те монеты из выбранных, которые изначально лежали вверх орлом. Значит, во второй кучке вверх орлом лежат остальные $5-(5-m)$ монет, т.е. тоже m штук.

(**5—6.5**) *Барон Мюнхгаузен утверждает, что на Сырном острове имеются четыре области, каждая в форме треугольника, и при этом любые две из них имеют общую границу в виде отрезка ненулевой длины. Могут ли слова барона оказаться правдивыми?*

Решение. Барон — честнейший человек на свете. Возможная карта этих областей приведена на рисунке.



к решению задачи 5—6.5.

ОТВЕТ: Могут.

(**5—6.6**) *Мальвина продиктовала Буратино два слова: ПЯТАК и ПЯТКА. Однако при написании этих слов Буратино заменил одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так что вместо слов образовались два пятизначных числа. В наказание Мальвина заставила Буратино найти максимальное число, на которое делится каждое из написанных им чисел. У Буратино получилось, что это число* 117.

а) Докажите, что Буратино ошибся.

б) Какое наибольшее число мог получить Буратино, если бы не ошибался в счёте?

Решение. Без ограничения общности, пусть $K > A$. Заметим, что если n — общий делитель чисел ПЯТАК и ПЯТКА, то на n делится и разность этих чисел, равная $10\text{К}+\text{А}-(10\text{А}+\text{К}) = 9(\text{К}-\text{А})$. Значит, $n \leqslant 9(\text{К}-\text{А})$. Но так как К и А — цифры, то максимум их разности равен 9 и достигается при К $= 9$, А $= 0$. Тогда $n \leqslant 81$, поэтому Буратино ошибся. Из рассуждения следует, что Буратино не мог получить числа, большего 81. Покажем, что 81 — возможный вариант правильного ответа. Действительно, такое могло произойти при условии П $= 2$, Я $= 3$, Т $= 4$, К $= 9$, А $= 0$ (пример, конечно, не единственный). В этом случае ПЯТКА $= 23490 = 81 \cdot 290$, ПЯТАК $= 23409 = 81 \cdot 289$.

ОТВЕТ: б) 81.

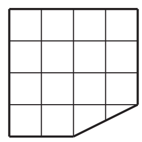
7 КЛАСС

(**7.1**) *Докажите, что*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}.$$

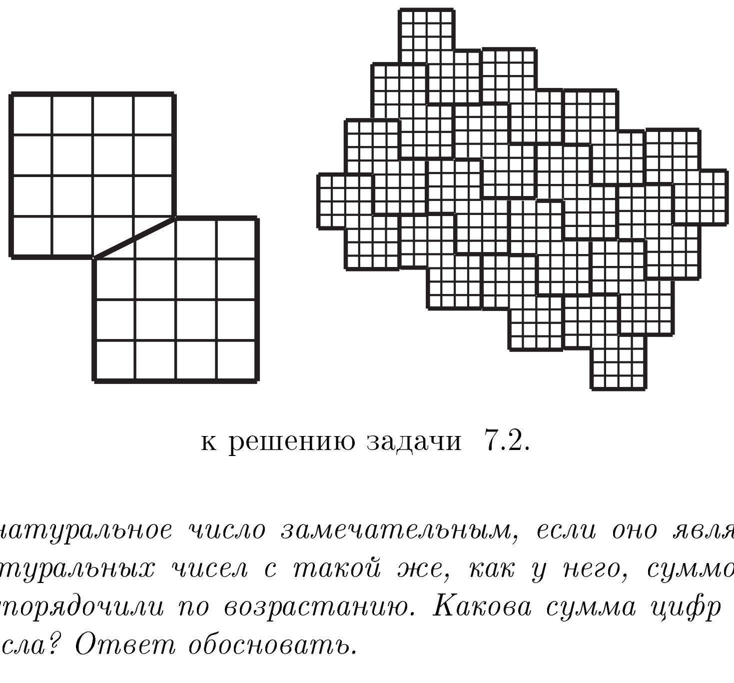
Решение. Обозначим левую часть равенства через A, правую — через B, и пусть $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$. Тогда $S-A=S-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+\ldots+2\cdot\frac{1}{98}+2\cdot\frac{1}{100}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}$. С другой стороны, $S-B=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}$, т.е. $S-A=S-B$, откуда $A=B$.

(**7.2**) *Покажите, как замостить плоскость одинаковыми плитками вида, изображённого на рисунке? Плитки разрешается поворачивать и переворачивать.*



к условию задачи 7.2.

Решение. Соединим плитки по две, как указано на рисунке. Получим плитки нового типа — прямоугольные, с парой вырезанных противоположных углов. Этими плитками замостим всю плоскость, выстраивая их диагональными рядами (см. рисунок).



к решению задачи 7.2.

(**7.3**) *Назовём натуральное число замечательным, если оно является наименьшим числом из всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Все замечательные числа упорядочили по возрастанию. Какова сумма цифр у* 2011*-го по счёту замечательного числа? Ответ обосновать.*

Решение.

Первый способ. Пусть натуральное число $n=\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2}\ldots a_2 a_1}$ имеет сумму цифр $S=a_k+a_{k-1}+a_{k-2}+\ldots+a_2+a_1$. Рассмотрим последовательность чисел

$$1,\ 2,\ \ldots,\ a_1,\ \overline{1a_1},\ \overline{2a_1},\ldots,\ \overline{a_2a_1},\ \overline{1a_2a_1},\overline{2a_2a_1},\ldots,\ n$$

(если какое-то $a_i = 0$, то соответствующая часть последовательности отсутствует). Ясно, что все эти числа (кроме последнего) меньше n, а суммы их цифр — суть последовательные натуральные числа от 1 до S. Поэтому все замечательные числа с суммой цифр меньше S лежат на отрезке $[1;\, n-1]$. Если дополнительно число n замечательное, то все замечательные числа с суммой больше, чем S, лежат на луче $[n+1;\, \infty)$. Иными словами в натуральном ряду замечательные числа идут в порядке возрастания сумм своих цифр. Из того, что для каждого натурального n имеется замечательное число, сумма цифр которого равна n, следует, что n-е по счёту натуральное число имеет сумму n.

Второй способ. Пусть натуральное число n является замечательным. Тогда все его цифры, кроме первой, — девятки. Действительно, если есть не первая цифра, отличная от 9, то увеличив эту цифру на единицу и одновременно понизив на 1 цифру старшего разряда, получим меньшее число с той же суммой цифр. Очевидно, верно и обратное, т.е., всякое число вида $\overline{m99\ldots9}$ является замечательным. Итого: первые девять замечательных чисел — суть однозначные натуральные числа, следующие 9 — двузначные числа, оканчивающиеся на 9, следующие 9 — трёхзначные, оканчивающиеся на 99, и т.д. Поскольку $2011 = 9\cdot 223+4$, то 2011 замечательное число имеет вид $4\underbrace{9999\ldots999}_{223\text{ цифры}}$. Очевидно, его сумма равна 2011.

Третий способ. Заметим, что для всякого натурального числа с суммой цифр $S > 1$, найдется меньшее число, сумма цифр которого равна $S-1$ (достаточно какую-нибудь ненулевую цифру уменьшить на единицу). Тогда, последовательно уменьшая исходное число, можно получить натуральное число, с любой суммой цифр, меньшей S. Таким образом, у всякого замечательного числом n с суммой цифр S найдутся меньшие его числа (в том числе и замечательные) с суммами цифр от 1 до $S-1$. С другой стороны, среди чисел, меньших n, нет чисел с суммой больше S (потому что тогда среди меньших, чем n чисел, было бы и замечательное с большей, чем S суммой, и предыдущее предложение привело бы к противоречию). Значит, перед замечательным числом с суммой цифр k стоит ровно $k-1$ замечательное число, поэтому сумма цифр 2011-го замечательного числа равна 2011.

ОТВЕТ: 2011.

(**7.4**) *В некоторой компании каждый сотрудник либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (говорит только ложь). Каждый сотрудник сказал про каждого другого: “Он лжец” или “Он рыцарь”. Всего слово “лжец” прозвучало* 2010 *раз. Какое наименьшее число сотрудников может работать в такой компании?*

Решение. Пусть в компании работает x рыцарей и y лжецов. Тогда каждый рыцарь произнесёт слово “лжец” y раз (всего xy “лжецов”), а каждый лжец — ровно x раз (ещё xy “лжецов”). Имеем $2010 = 2xy$, откуда $xy = 1005 = 3\cdot 5\cdot 67$. Значит, при $x \leqslant y$ имеем либо $x = 1$, $y = 1005$, либо $x = 3$, $y = 315$, либо $x = 5$, $y = 201$, либо $x = 15$, $y = 67$, а при $x \geqslant y$ получаем те же пары, только в обратном порядке. Наименьшую сумму $x + y$ имеет пара $x = 15$, $y = 67$ (или симметричная ей $x = 67$, $y = 15$) и эта сумма равна 82.

ОТВЕТ: 82.

(**7.5**) *На столе лежат* 20 *одинаковых монет:* 5 *орлом вверх и* 15 *орлом вниз. От вас требуется разложить монеты в две кучки (возможно, перевернув некоторые из монет) так, чтобы в первой и второй кучках было одинаковое число монет, лежащих* *орлом вверх. При этом у вас завязаны глаза, поэтому вы не можете видеть, как именно лежат монеты, а на ощупь отличить решку от орла вы тоже не можете.*

Решение. Возьмём любые 5 монет и образуем из них первую кучку, перевернув все 5. Остальные монеты образуют вторую кучку (их не переворачиваем). Покажем, что таким образом мы решим задачу. Действительно, пусть в первой кучке орлом вверх оказались m монет. Тогда остальные монеты (их $5-m$ штук) — это в точности те монеты из выбранных, которые изначально лежали вверх орлом. Значит, во второй кучке вверх орлом лежат остальные $5-(5-m)$ монет, т.е. тоже m штук.

(**7.6**) *Река с параллельными берегами имеет ширину* 100 *м. На одном её берегу имеется пристань. Требуется на катере проплыть от пристани до противоположного берега. Река всюду судоходна, но на ней имеется единственный остров, про который известно только то, что периметр острова равен* 800 *м. Докажите, что какой бы ни была форма острова, и в каком бы месте реки (по отношению к пристани) он не располагался, можно выполнить задание, проплыв при этом не более* 300 *м. Течение реки слабое, и движению катера не мешает.*

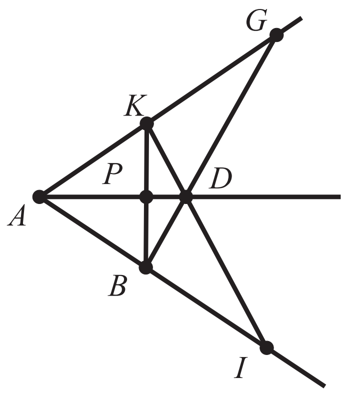
Решение. Проекция острова на берег реки представляет собой отрезок длиной не более 400 м (так как при обходе острова по периметру проекция будет пройдена как минимум дважды: в одну и в другую сторону). Если пристань не попадает в эту проекцию, то река преодолевается по прямой, перпендикулярно берегу, при этом путь занимает 100 м. Если же попадает, то в силу принципа Дирихле до одного из концов проекции расстояние не более 200 м. Плывём так: параллельно к берегу до ближайшего конца проекции (не более 200 м), затем перпендикулярно берегу реки (ещё 100 м). Всего не более 300 м.

Примечание. Уменьшить число 300 нельзя: Если остров представляет собой узкую полосу длиной 400 м, расположен вдоль реки близко к берегу, на котором стоит пристань, и пристань как раз напротив середины острова, описываемый в решении путь будет кратчайшим и иметь длину ровно 300 м.

8 КЛАСС

(8.1) (Посвящается чемпионату мира по футболу 2018 года.) *На футбольном поле тренируются 7 игроков: Саша Денисов и шесть футболистов сборной России: Аршавин, Билялетдинов, Жирков, Игнашевич, Кержаков и Павлюченко. Дик Адвокат разрешает им отдавать друг другу пасы только по полю (а не по воздуху), поэтому, если между какими-то двумя игроками стоит третий игрок, пас от первого второму невозможен. Оказалось, что Аршавин может отдать пас только Кержакову, Павлюченко и Билялетдинову; Кержаков не может отдать пас Билялетдинову и Игнашевичу; Билялетдинов не может отдать пас, кроме Кержакова, ещё и Жиркову. Перечислите всех футболистов сборной России, которым может отдать пас Саша Денисов, если известно, что никакие четыре игрока не располагаются на одной прямой. (Предполагается, что все тренирующиеся стоят на месте и не перемещаются по полю.)*

Решение.



к решению задачи 8.1.

Первый способ. Отметим на макете поля точки A, B, G, I, K, P и D, в которых расположены Аршавин, Билялетдинов, Жирков, Игнашевич, Павлюченко и Денисов соответственно. В силу условия задачи точки K, P, и B расположены где-то на отрезках $[A, D]$, $[A, G]$ и $[A, I]$, причём на каждом отрезке стоит ровно одна из этих точек. Кроме того, никакие два из рассмотренных отрезков не лежат на одной прямой. На отрезках $[K, B]$ и $[K, I]$ также должно находится по одной отмеченной точке; ясно, что обе эти точки лежат на прямой (A, P). Таким образом, точка I не лежит на луче (A, P). Не лежит она и на прямой (A, K), так как в этом случае проходил бы пас от Кержакова к Игнашевичу. Значит, точки A, B и I лежат на одной прямой и расположены на ней именно в том порядке, в каком перечислены. Кроме того, луч $[A; P)$ лежит внутри угла $\angle KAB$. Теперь, так как пас от Билялетдинова Жиркову невозможен, видим, что точка G лежит на луче $[A, K)$. Тогда точка D обязана лежать на луче $[A, P)$, причём точка P между точками A и D. Кроме того, одна из точек P и D лежит на отрезке $[K, B]$, а вторая — на пересечении отрезков $[K; I]$ и $[G; B]$. Получили единственно возможное расположение точек (см. рисунок). Теперь видно, что Саша Денисов может отдать пас любому игроку, кроме Аршавина.

Второй способ. Пас не может быть отдан только в том случае, если между игроками есть другой игрок, то есть, каждой такой паре можно сопоставить ровно одну прямую, имеющую три игрока. Назовем такую прямую запрещённой.

В условии таких пар указано шесть, следовательно, и запрещённых прямых указано шесть (если бы две пары соответствовали одной прямой, то на ней стояло бы минимум 4 игрока, что противоречит условию). Предположим, что Саша Денисов не может отдать пас еще кому-то кроме Аршавина. Тогда запрещённых прямых будет семь. Далее, всего прямых через семь точек можно провести $6 \cdot 7/2 = 21$. Но, если три игрока находятся на одной прямой, то она при таком подсчёте будет учтена три раза. Таким образом, прямая проведенная через любые две точки, в которых расположены игроки, является запрещённой.

Итак, через семь игроков проходит ровно семь прямых, каждая из которых запрещённая. Но тогда и через каждого игрока проходит ровно три запрещённые прямые. В частности, на каждой прямой в трёх точках встречаются ещё по две прямые, поэтому каждую прямую пересекают все остальные, и все точки пересечения находятся среди семи отмеченных.

Проведем все отрезки между точками, получим какой-то выпуклый многоугольник и некоторый набор отрезков внутри. Поскольку любые две прямые пересекаются по отмеченным точкам, то любые две стороны многоугольника пересекаются, следовательно, этот многоугольник суть треугольник. На каждой его стороне по три отмеченные точки; точки на сторонах, отличные от вершин, обозначим через K, L, M, а последнюю из семи точек (единственную лежащую внутри треугольника) через O. Теперь на прямой KL лежит еще одна точка, но вне треугольника точек нет, следовательно, это O. Аналогично точка O лежит на прямых KM и LM, тогда все эти четыре точки K, L, M и O лежат на одной прямой, что невозможно. Следовательно Саша Денисов может отдать пас всем, кроме Аршавина.

Примечание. Конструкция из семи точек, исследуемая во втором доказательстве, называется конечной проективной плоскостью второго порядка или плоскостью Фано. Она действительно не может быть вложена в евклидово пространство, в котором выполняется следующее утверждение, называемое аксиомой Фано: диагонали всякого четырехвершинника не параллельны. На плоскости Фано всё наоборот, всякие две диагонали, как и противоположные стороны, пересекаются на горизонте, то есть параллельны. В плоскости Фано, кстати, именно KLM лежали бы на одной прямой.

ОТВЕТ: Билялетдинов, Жирков, Игнашевич, Кержаков и Павлюченко.

(**8.2**) **(2011 год — год Кролика)** *Весь прошлый год Кролик провёл в вычислениях и нашёл-таки наибольшее натуральное число N, для которого число $N^{2010}+1$ — простое. А сколько цифр содержит десятичная запись такого числа N?*

Решение. Заметим, что $2010 = 3 \cdot 670$. Пусть $a = N^{670}$. Тогда $N^{2010}+1 = a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$. В обеих скобках стоят натуральные числа, при этом первая скобка заведомо не меньше 2. Если вторая скобка тоже не меньше 2, то число N^{2010} составное. Если же она равна 1, то $a^2-a=0$, что равносильно (для натуральных a) условию $a=1$. Но это значит, что $N^{670}=1$, $N=\pm 1$, а так как число N — натуральное, то $N=1$. Значит, единственным натуральным числом, которое мог найти Кролик, является число 1. Это число содержит одну цифру в своей десятичной записи.

ОТВЕТ: Одну цифру.

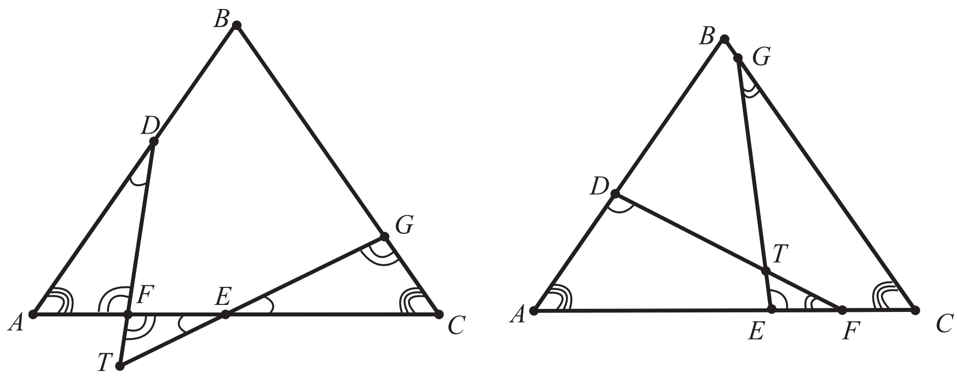
(**8.3**) *Каждый зритель Арканзаса, пришедший на спектакль "Королевский жираф", принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля зрители закидали обоих актеров (короля и герцога) своими припасами, причем каждый принесенный предмет попал либо в короля, либо в герцога. Оказалось, что на долю каждого из них досталось поровну предметов. Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть всей капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?*

Решение. Пусть x зрителей принесли гнилую капусту, y — тухлые яйца. Тогда всего было принесено $2x+3y+64$ припасов, и половина из них (а это $x+1,5y+32$) досталось герцогу. С другой стороны, на долю герцога пришлось $\frac{4 \cdot 3y}{5}$ яиц и $\frac{6 \cdot 2x}{7}$ кочанов капусты. Имеем уравнение $x + 1,5y + 32 = \frac{4 \cdot 3y}{5} + \frac{6 \cdot 2x}{7}$, которое (после умножения на 70 и приведения подобных) приводится к равносильному $50x + 63y = 32 \cdot 70$. Его требуется решить в целых числах. Заметим, что число $63y = 32 \cdot 70 - 50x$ делится на 10 без остатка, а так как числа 63 и 10 взаимно просты, то на 10 делится и число y. Аналогично x делится на 7. Пусть $x = 7x_1$, $y = 10y_1$, x_1, y_1 — натуральные числа. Подставив эти выражения в решаемое уравнения получим после сокращения на 70: $5x_1 + 9y_1 = 32$. Теперь ясно, что при $y_1 > 3$ левая часть больше правой, и равенство невозможно. Случаи $y_1 = 1$ и $y_1 = 2$ приводят к нецелому значению x_1. Единственный возможный вариант $y_1 = 3, x_1 = 1$. Тогда $y = 30$, $x = 7$, а общее число зрителей $30 + 7 + 64 = 101$.

ОТВЕТ: 101 зритель.

(**8.4**) *На основании AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили две различные точки F и E, а на сторонах AB и BC — соответственно точки D и G так, что $AC = AD + AE = CF + CG$. Найдите угол между прямыми DF и EG, если $\angle ABC = 70°$.*

Решение. Обозначим через T точку пересечения прямых DF и EG. Возможно два случая в зависимости от того, в каком порядке на отрезке AC расположены точки E и F — см. рисунок.



к решению задачи 8.4.

Рассуждения в обоих случаях одинаковы. Из равенства $AC = AD + AE$ следует, что $AD = EC$, а из равенства $AC = CF + CG$ — что $CG = AF$. Тогда треугольники ADF и CGE равны по двум сторонам и углу между ними; значит, равны углы $\angle ADF = \angle CEG$ и $\angle AFD = \angle CGE$. Рассмотрим треугольник FET. Он имеет два угла, равные двум углам треугольника ADF. Так как сумма углов любого треугольника одна и та же, отсюда следует, что и третьи углы указанных треугольников равны, т.е. $\angle FTE = \angle BAC$. Но в силу того, что треугольник ABC — равнобедренный, получаем $\angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2} = 55°$.

ОТВЕТ: 55°.

(**8.5**) *Как-то на стройку привезли несколько блоков общим весом 100 пудов. Оказалось, что суммарный вес трёх самых лёгких блоков равняется 25 пудам, а трёх самых тяжёлых — 35 пудам. Также известно, что веса всех блоков различны, и, кроме того,* *блок может весить и нецелое число пудов. Сколько блоков привезли на стройку? Ответ обосновать.*

Решение. Общий вес всех блоков, за исключением трёх самых лёгких и трёх самых тяжёлых, равен $100-25-35=40$ пудов. Пусть этих блоков n штук. Вес каждого из них больше веса самого тяжёлого блока среди трёх самых лёгких, а он (по принципу Дирихле) больше, чем $25/3$ пуда. Аналогично, вес каждого из n блоков меньше веса самого лёгкого блока из трёх самых тяжёлых, который, в свою очередь, меньше, чем $35/3$ пуда. Имеем двойное неравенство $\frac{25}{3}n<40<\frac{35}{3}n$, которое равносильно неравенству $\frac{120}{35}<n<\frac{120}{25}$. Единственное натуральное число в полученном промежутке — это число 4. Значит, $n=4$, а всего завезли $3+3+4=10$ блоков. Пример на 10 блоков легко строится: например, веса блоков в пудах (в порядке возрастания) таковы: 23/3, 25/3, 27/3, 28/3, 29/3, 30/3, 33/3, 34/3, 35/3, 36/3.

ОТВЕТ: 10 блоков.

(**8.6**) *Компьютерная программа работает следующим образом: ровно в полдень, т.е. в* 12 *часов* 00 *минут, она выдаёт на экран случайно выбранное натуральное число, а затем спустя каждую минуту меняет его, прибавляя к написанному на экране числу сумму его цифр. Вчера в* 14 *часов* 30 *минут на экране появилось число* 2011.

а) Докажите, что число, выбранное машиной вчера в полдень, не равнялось 3.

б) Докажите, что число, выбранное машиной вчера в полдень, не равнялось 2.

Решение.

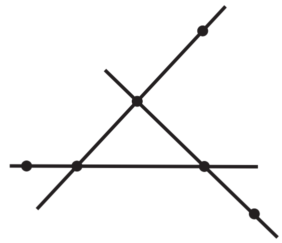
а) Заметим, что если в некоторый момент на экране появится число, кратное 3, то спустя минуту к нему добавится сумма его цифр (которая тоже делится на 3) и новое число также будет кратно 3. Поэтому, если бы машина выбрала число 3, то все возникающие числа были бы кратны 3. Но число 2011 на 3 не делится.

б) Согласно признаку делимости на 3, сумма цифр любого числа имеет при делении на 3 тот же остаток, что и само число, поэтому если в какой-то момент на экране возникло число, которое при делении на 3 даёт в остатке 1, то через минуту появится число, дающее (при делении на 3) остаток 2, ещё через минуту — число, дающее в остатке 1, затем снова 2, снова 1 и т.д. Таким образом, если в полдень появилась двойка, то в моменты времени 12.02, 12.04, 12.06, … 14.30 будут появляться числа, которые при делении на 3 дают в остатке 2. Но число 2011 к таковым не относится.

9 КЛАСС

(9.1) (Посвящается победе молодёжной сборной России на чемпионате мира по хоккею 2011 года.) *На льду Дворца спорта хоккеисты сборной России отрабатывают технику паса. Им разрешено отдавать шайбу друг другу только по льду (а не по воздуху), поэтому, если между какими-то двумя игроками стоит третий, пас от одного другому невозможен. В какой-то момент тренировки оказалось, что хотя ни на одной прямой не находится более трёх хоккеистов, у каждого игрока имеется партнёр, которому он не может отдать пас. Какое наименьшее число хоккеистов участвовало в тренировке? Ответ обоснуйте.*

Решение. На рисунке указано требуемое расположение 6 хоккеистов. Покажем, что если тренирующихся меньше, то указанная в задаче ситуация невозможна. Предположим противное, пусть хоккеистов не больше 5. Выберем любого из них (игрок A), и пусть он не может дать пас игроку B. На прямой AB стоит ещё только один игрок (он стоит между игроками A и B), обозначим его через C. Пусть игрок C не может отдать игроку D (ясно, что игрок D отличен от трёх рассмотренных), тогда на отрезке $[C, D]$ стоит пятый игрок E. Так как в силу предположения других игроков на поле нет, то игрок E может отдать пас всем четырём игрокам A, B, C и D — противоречие.



к решению задачи 9.1.

ОТВЕТ: 6 хоккеистов.

(9.2) *Известно, что $x + 3y + 2z = 1$. Докажите неравенство*

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{4z+2} < 5,5.$$

Решение. Первый способ. Известно, что для любых неотрицательных чисел a, b верно неравенство

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b,$$

причем неравенство обращается в равенство только при $a = b$. Отсюда получаем:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{4z+2} =$$

$$= \sqrt{(2x+3)\cdot 1} + \sqrt{(6y+1)\cdot 1} + \sqrt{(4z+2)\cdot 1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2x+3+1}{2} + \frac{6y+1+1}{2} + \frac{4z+2+1}{2} = x + 3y + 2z + 4,5 = 1 + 4,5 = 5,5.$$

Равенство достигается в том и только том случае, если $2x+3 = 6y+1 = 4z+2 = 1$, т.е. при $x = -1$, $y = 0$, $z = -0,25$. Но эта тройка чисел не удовлетворяет равенству $x+3y+2z = 1$, поэтому в выписанной оценке неравенство строгое.

Второй способ. Проведём равносильные преобразования:

$$x + 3y + 2z = 1 \Leftrightarrow 2x + 6y + 4z = 2 \Leftrightarrow (2x+3) + (6y+1) + (4z+2) = 8,$$

поэтому

$$(2x+3) - 2\sqrt{2x+3} + 1 + (6y+1) - 2\sqrt{6y+1} + 1 + (4z+2) - 2\sqrt{4z+2} + 1 =$$

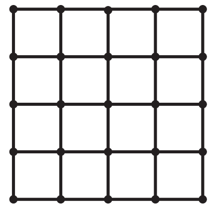
$$= 11 - 2(\sqrt{2x+3} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{4z+2})$$

что эквивалентно равенству

$$\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{6y+1}-1\right)^2 + \left(\sqrt{4z+2}-1\right)^2 =$$

$$= 2(5,5 - (\sqrt{2x+3} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{4z+2})).$$

Левая часть последнего равенства неотрицательна, и она равна нулю тогда и только тогда, когда $2x+3 = 6y+1 = 4z+2 = 1$, т.е. $x = -1$, $y = 0$, $z = -0,25$. Так как такая тройка чисел x, y, z не удовлетворяет условию задачи, то левая часть равенства строго положительна, поэтому положительна и правая, что и требовалось доказать.

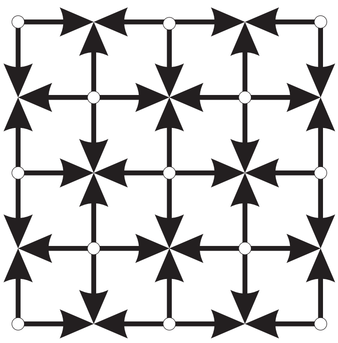


к условию задачи 9.3.

(**9.3**) 40 *бикфордовых шнуров длиной* 1 *метр каждый имеют синий и красный конец. Огонь распространяется вдоль бикфордова шнура только в направлении от синего конца к красному концу, но не наоборот. Требуется из шнуров собрать квадратную решётку* 4×4 *м (см. рисунок). Можно ли при этом составить шнуры таким образом, чтобы полученную решётку нельзя было сжечь полностью, поджигая её в любых* 12 *местах? (В узлах решётки огонь переходит с красного конца на все примыкающие к нему синие концы.)*

ОТВЕТ: Можно.

Решение. Рассмотрим расположение кусков шнура, указанное на рисунке. Стрелочками обозначены красные концы шнуров. Выделим 13 точек (они на рисунке отмечены белыми кружками). Как бы мы не поджигали конструкцию в 12 местах, по принципу Дирихле найдётся белый кружок, в котором поджога не будет. Но тогда эта точка останется не сгоревшей, ибо огонь в неё не может прийти ни по одному из направлений.



к решению задачи 9.3.

(**9.4**) *Докажите, что для всех чисел* a, b, c *из отрезка* $[0;\ 1]$ *справедливо неравенство*

$$a + b + c \leqslant 2 + abc.$$

Решение.

Первый способ. Зафиксируем числа b и c и рассмотрим функцию $f(a) = a+b+c-abc$. Надо показать, что она не превосходит 2 для любого a из отрезка $[0;\ 1]$. Так как $f(a)$ — линейная функция, то её наибольшее значение достигается на концах отрезка, поэтому достаточно проверить, что $f(0) \leqslant 2$ и $f(1) \leqslant 2$. Первое неравенство очевидно, так как оно имеет вид $b+c \leqslant 2$, где каждое из чисел b и c не превосходит 1. Второе неравенство имеет вид $1+b+c-bc \leqslant 2 \Leftrightarrow (1-b)(1-c) \geqslant 0$, и также верно при $0 \leqslant b \leqslant 1$ и $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Второй способ. Переобозначим $x = 1-a, y = 1-b, z = 1-c$ (все они также из отрезка $[0;\ 1]$), тогда исходное неравенство эквивалентно следующему $3-x-y-z \leqslant 2+(1-x)(1-$

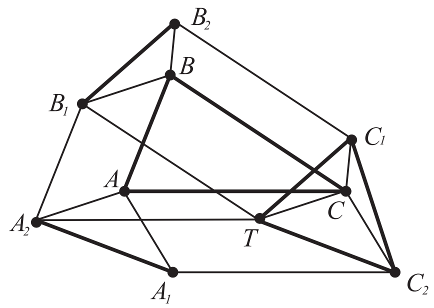
$y)(1-z)$, то есть $1-x-y-z \leqslant 1-x-y-z+xy+xz+yz-xyz$, и $0 \leqslant xy+xz+yz(1-x)$, что выполняется в силу $x, y, z \geqslant 0, x \leqslant 1$.

Третий способ. Легко проверить, что в условиях задачи верна цепочка неравенств

$$a+b+c-abc = a(1-bc)+b+c \leqslant 1-bc+b+c = 1+b(1-c)+c \leqslant 1+1-c+c = 2.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

(**9.5**) *На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_2B_1B, BB_2C_1C и CC_2A_1A. Всегда ли из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 можно составить треугольник? Ответ обоснуйте.*



к решению задачи 9.5.

Решение. Проведём через вершину C луч, сонаправленный с лучом AA_2, и отметим на нём точку T так, чтобы $AA_2 = CT$ (см. рисунок). (При этом, так как четырёхугольник AA_2B_1B является параллелограммом, то $BB_1 \parallel CT$ и $BB_1 = CT$.) Четырёхугольники CTA_2A и CTB_1B — параллелограммы (их противоположные стороны равны и параллельны), поэтому отрезки AC и A_2T также равны и параллельны (этот же факт верен и для отрезков CB и B_1T). Но четырехугольник ACC_2A_1 — параллелограмм, поэтому равны и параллельны отрезки AC и A_1C_2. Тогда, в свою очередь, равными и параллельными будут отрезки A_2T и A_1C_2, т.е. четырёхугольник $A_2A_1C_2T$ — параллелограмм, откуда следует равенство $C_2T = A_1A_2$. Аналогично получается равенство $C_1T = B_1B_2$. Но тогда треугольник C_2C_1T и есть треугольник, составленный из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

ОТВЕТ: а) Всегда.

(**9.6**) *Пусть $S(x)$ обозначает сумму цифр десятичной записи натурального числа x. Существует ли такое натуральное a, ($a \geqslant 10$) что уравнение $a = x+S(x)$ относительно x*

а) не имеет решений в натуральных числах;

б) имеет ровно 2 решения в натуральных числах;

в) имеет более 2 решений в натуральных числах.

Решение. а) Пусть числа a и x удовлетворяют уравнению из условия, и пусть a — двузначное число. Тогда число x не более чем двузначное, т.е. $x = 10m+n$, где m и n — цифры, одновременно не равные нулю. Тогда $a = x+S(x) = 10m+n+m+n = 11m+2n$. Рассмотрим, например, $a = 20$. Уравнение $11m+2n = 20$ в цифрах решений не имеет, так как при $m < 1$ число n должно быть больше или равно 10, а при $m > 1$ число n отрицательно, а при $m = 1$ число n не целое.

б) Покажем, что число $a = 101$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, уравнение $x+S(x) = 101$ имеет корнями числа $x = 100$ и $x = 91$. Других корней нет, так как если x более, чем двузначное число и отлично от 100, то $x+S(x) > 101$, а если x — двузначное или однозначное число ($x = 10m+n$), то уравнение принимает вид $11m+2n = 101$. Опять при $m < 8$ число n должно быть больше 10, при $m = 8$ число n не является целым, а при $m = 9$ возникает уже известное решение $x = 91$. Конечно, существуют и другие числа a с таким свойством; можно доказать, что $a = 101$ — наименьшее из них.

в) Подойдёт, например, число $a = 1\underbrace{000\ldots000}_{12\text{ нулей}}3$. Непосредственно проверяется, что числа $x = 1\underbrace{000\ldots000}_{12\text{ нулей}}1$, $y = \underbrace{999\ldots999}_{11\text{ девяток}}02$ и $z = \underbrace{999\ldots999}_{10\text{ девяток}}893$ являются корнями уравнения $a = x + S(x)$.

ОТВЕТ: а) Да. б) Да. в) Да.

10 КЛАСС

(**10.1**) *Решите неравенство* $x^2 \leqslant [2x]\cdot\{2x\}$. *Здесь* $[y]$ *— целая часть числа* y, *т.е. наибольшее целое число, не превосходящее* y, *а* $\{y\} = y - [y]$ *— дробная часть числа* y.

Решение. Пусть $[2x] = c$, $\{2x\} = d$. Тогда $0 \leqslant d < 1$ и $x = \dfrac{c+d}{2}$. В новых обозначениях неравенство имеет вид $\left(\dfrac{c+d}{2}\right)^2 \leqslant cd \Leftrightarrow (c-d)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow c = d$. Но так как c — число целое, а $0 \leqslant d < 1$, то $c = d = 0$ и $x = \dfrac{c+d}{2} = 0$.

ОТВЕТ: $x = 0$.

(**10.2**) *В сундуке Билли-Бонса лежат золотые, серебряные и медные монеты общим числом* 120 *штук. Монеты лежат в пяти различных отделениях, при этом ни в каких двух отделениях в сумме не наберётся* 30 *золотых монет, и ни в каких трёх отделениях в сумме не наберётся* 20 *серебряных монет. Докажите, что в каких-нибудь четырёх отделениях имеется не менее* 15 *медных монет.*

Решение.

Первый способ. Ясно, что если мы будем извлекать из сундука монеты (не перекладывая оставшиеся из одного отделения сундука в другое), то условие задачи по прежнему будет выполняться.

Покажем, что золотых монет в сундуке не более 71. Предположим противное. Оставим в сундуке какие угодно 72 золотые монеты, а все остальные монеты уберём. Рассмотрим отделение сундука, в котором осталось меньше всего монет. По принципу Дирихле в этом отделении 14 монет или меньше. Тогда в остальных четырёх отделениях по крайней мере 58 золотых монет. Будем считать, что их ровно 58 (если это не так, уберём лишние из сундука). Опять по принципу Дирихле найдём отделение, содержащее 14 монет или меньше, тогда в трёх оставшихся отделениях будет 44 золотых монеты или больше. Считаем, что в некоторых трёх отделениях ровно 44 золотых монеты. И ещё раз по принципу Дирихле находим кучку, содержащую не более 14 монет. В двух оставшихся отделениях окажется 30 золотых монет (или более), что противоречит условию.

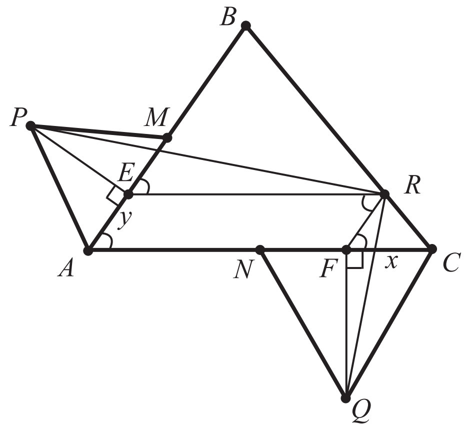
Аналогично покажем, что серебряных монет в сундуке не больше 31. Пусть их 32 (все остальные монеты уберём). В самом “бедном” из отделений их не больше 6, значит, в каких-то четырёх их не менее 26; полагаем, что монет ровно 26. Опять в самом “бедном” из оставшихся отделений будет не более 6 монет, значит, в трёх оставшихся 20 или более монет — противоречие.

Общее число золотых и серебряных монет не больше 102, значит, в сундуке 18 или больше медных монет. Оставим ровно 18 медных монет, убрав остальные. В каком-то из отделений (по принципу Дирихле) будет не более 3 монет, значит, в остальных четырёх отделениях их не менее 15, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть a_i, b_i и c_i ($1 \leqslant i \leqslant 5$) — количества золотых, серебряных и медных монет в i-ом отделении. Без ограничения общности, можно полагать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_5$. Также можно полагать, что при этом $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_5$ и $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_5$ (если, например, окажется, что $b_1 > b_2$, то серебряные монеты из первого отделения сундука переложим во второе, а из второго — в первое, при этом условие задачи останется выполненным). Так как $a_4 + a_5 < 30$, то $a_4 \leqslant 14$, а потому и все остальные a_i не превосходят 14. Тогда $a_1 + \ldots + a_5 < 14 + 14 + 14 + 30 = 72$, т.е. в сундуке Билли Бонса не более 71 золотой монеты. Аналогично $b_3 + b_4 + b_5 < 20$, откуда b_3 (а тогда и b_1 и b_2) не больше, чем 6. Поэтому $b_1 + \ldots + b_5 < 6 + 6 + 20 = 32$, значит, серебряных монет в сундуке не более 31. Предположим, что ни в каких четырёх отделениях нет 15 медных монет, тогда $c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \leqslant 14$, $c_1 \leqslant c_2 \leqslant 3$ и $c_1 + \ldots + c_5 \leqslant 3 + 14 = 17$. Всего монет в сундуке при этом не больше, чем $71 + 31 + 17 = 119$ — противоречие.

(**10.3**) *Пусть M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, треугольники APM и NQC — правильные, построенные вне треугольника ABC, точка R лежит на стороне BC и делит её в отношении $3 : 1$, считая от точки B. Докажите, что угол PRQ — прямой.*

Решение. Пусть точки E и F — середины отрезков AM и CN соответственно (см. рисунок). Тогда $PE \perp AB$ и $QF \perp AC$, поскольку в правильных треугольниках высоты и медианы совпадают. Кроме того, $AE : EB = 1 : 3 = CR : RB$, откуда следует, что прямые AC и ER параллельны. Аналогично $RF \parallel AB$, поэтому четырёхугольник $AERF$ — параллелограмм. Тогда $\angle BAC = \angle ERF = \angle BER = \angle RFC$. Так как $\angle PEB = 90^\circ = \angle QCF$, то отсюда следует равенство углов $\angle PER = \angle RFC$. Теперь видно, что если $\angle BAC = 90^\circ$, точки P, E, R лежат на одной прямой; это же справедливо для точек R, F, Q. Тогда $\angle PRQ = \angle ERF = \angle BAC = 90^\circ$ и утверждение в этом случае доказано.



к решению задачи 10.3.

Пусть $\angle BAC \neq 90^\circ$. Будем считать, что угол A — острый (случай, когда этот угол тупой, разбирается аналогично). Положим $x = FC$, $y = AE$. Тогда $RE = AF = 3x$ и $RF = AE = y$. Кроме того, поскольку высота правильного треугольника составляет $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ от его стороны, то $PE = y\sqrt{3}$ и $QF = x\sqrt{3}$. Отсюда $\dfrac{PE}{ER} = \dfrac{y\sqrt{3}}{3x} = \dfrac{y}{\sqrt{3}x} = \dfrac{RF}{QF}$, что (учитывая равенство $\angle PER = \angle RFC$) доказывает подобие треугольников PER и RFC. Из этого подобия следует равенство углов $\angle PRE = \angle RQF$ и $\angle FRQ = \angle RPE$. Тогда имеем $\angle PRQ = \angle PRE + \angle ERF + \angle FRQ = \angle PRE + \angle REB + \angle RPE = 180^\circ - \angle PEB = 90^\circ$, и утверждение доказано.

(**10.4**) *Докажите неравенство* $|\cos x| + |\cos y| + |\cos(x+y)| \geqslant 1$.

Решение.

$$|\cos x| + |\cos y| + |\cos(x+y)| \geqslant |\cos x||\sin y| + |\cos y||\sin x| + |\cos(x+y)| \geqslant$$

$$\geqslant |\cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x| + |\cos(x+y)| = |\sin(x+y)| + |\cos(x+y)| \geqslant$$

$$\geqslant \sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1.$$

(**10.5**) *Докажите, что для любых натуральных чисел x, y, z можно подобрать такое натуральное число a, что число $(x^2y^2 + a)(y^2z^2 + a)(z^2x^2 + a)$ будет квадратом натурального числа.*

Решение.

Первый способ. Положим $a = xyz(x + y + z)$. Тогда $x^2y^2 + a = xy(xy + z(x + y + z)) = xy(x(y + z) + z(y + z)) = xy(x + z)(y + z)$. Аналогично, $y^2z^2 + a = yz(x + y)(x + z)$ и $(z^2x^2 + a = xz(x + y)(y + z)$. В итоге всё выражение равно $(xyz(x + y)(x + z)(y + z))^2$.

Второй способ. Задача будет решена, если для любых натуральных x, y, z будет найдено решение в натуральных числах системы уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2 + a &= pq \\ y^2z^2 + a &= qr \\ y^2z^2 + a &= rp. \end{cases}$$

Вычитая уравнения друг из друга по кругу, имеем эквивалентную систему

$$\begin{cases} q(p - r) &= y^2(x^2 - z^2) \\ r(q - p) &= z^2(y^2 - x^2) \\ p(r - q) &= x^2(z^2 - y^2). \end{cases}$$

Если теперь распределить множители справа так: $q = y \cdot y, p - r = (x + z) \cdot (x - z)$, то будет $a = 0$, что нас не устраивает. Распределим их следующим образом:

$$q{=}y(x{+}z),\ p{-}r{=}y(x{-}z),\ r{=}z(y{+}x),\ q{-}p{=}z(y{-}z),\ p{=}x(z{+}y),\ r{-}q{=}x(z{-}y).$$

Получившаяся система (а, значит, и исходная система) совместна, при этом число $a = xy(xy + zx + zy + z^2) - x^2y^2 = xyz(x + y + z)$ есть число натуральное.

(**10.6**) *На земле лежат* 2011 *палочек, все разной длины. Всегда ли можно разломить одну из палочек на* 2 *части (не обязательно равные) так, чтобы получившиеся* 2012 *палочек можно было бы разложить на две группы суммарной равной длины по* 1006 *палочек в каждой? Ответ обоснуйте.*

Решение. Выберем самую длинную палочку (пусть её длина a), а остальные разложим произвольным образом в две кучки по 1005 палочек в каждой. Пусть сумма длин палочек в кучках равны l и s соответственно и пусть $l \geqslant s$. Возможно два случая:

1) $l - s < a$. Тогда разломим самую длинную палочку на две части длинами $\dfrac{a - (l - s)}{2}$ и $\dfrac{a + (l - s)}{2}$. Этот разлом искомый, так как добавив меньшую часть к кучке большей длины, а большую — к кучке меньшей длины, получим требуемое разложение 2012 палочек.

2) $l - s \geqslant a$. Будем перекладывать палочки в кучках с целью добиться ситуации, описываемой первым случаем. Возьмём из каждой кучки по произвольной палочке и поменяем их местами. Если разность суммарных длин кучек всё ещё не меньше a, возьмём ещё по палочке (отличные от ранее взятых), поменяем их местами и т.д. Покажем, что наступит момент, когда суммарная разность длин станет меньше a. Действительно, если мы осуществим все 1005 перекладываний, то начальные кучки просто поменяются местами, и сумма длин палочек в той кучке, где она была меньшей, теперь станет большей. Значит, по ходу перекладываний был момент, когда впервые сумма длин палочек в первой кучке станет меньше, чем сумма длин палочек во второй. Пусть в этот момент суммарная длина палочек первой кучки равна x, а второй равна y $(x < y)$. Пусть последним перекладыванием мы переложили две палочки, разность длин которых равна d (ясно, что $d < a$). Тогда суммарные длины палочек в кучках до этого перекладывания были $x + d$ и $y - d$, при этом

по выбору момента $x+d > y-d$. Покажем, что либо $y-x < a$, либо $(x+d)-(y-d) < a$; этого достаточно для завершения доказательства. Пусть, от противного, оба неравенства неверны, т.е. $y-x \geqslant a$ и $x+d-y+d \geqslant a$. Сложим эти неравенства почленно и после сокращения на 2 получим $d \geqslant a$ — противоречие.

ОТВЕТ: Всегда можно.

11 КЛАСС

(**11.1**) *Найдите все пары действительных чисел* $(x,\ y)$, *которые удовлетворяют неравенству*

$$y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \leqslant 3xy.$$

Решение. Проведём равносильные преобразования

$$y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \leqslant 3xy$$

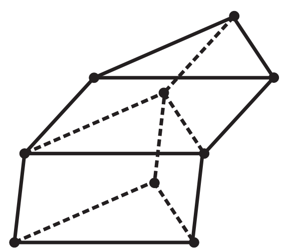
$$y^2 - 3xy + (y - x^2 - xy) + x^2 + xy + \sqrt{y - x^2 - xy} \leqslant 0$$
$$y^2 - 2xy + x^2 + (y - x^2 - xy) + \sqrt{y - x^2 - xy} \leqslant 0$$
$$(y - x)^2 + z^2 + z \leqslant 0,$$

где $z = \sqrt{y - x^2 - xy} \geqslant 0$. Так как сумма неотрицательных чисел не может быть величиной отрицательной, а равна нулю если и только если все слагаемые равны нулю, то полученное неравенство равносильно системе уравнений $\left\{\begin{array}{rcl} y - x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x \\ x^2 + xy & = & y \end{array}\right.$. Подставив во второе уравнение $y = x$ и решив полученное квадратное уравнение, получим ответ.

ОТВЕТ: $(0,\ 0)$, $(1/2,\ 1/2)$.

(**11.2**) *В одном старом учебнике геометрии дано такое определение призмы: "Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы." Приведите пример многогранника, удовлетворяющего этому определению, но не являющегося призмой.*

Решение. Пример невыпуклого многогранника можно получить, взяв две призмы с равными основаниями, но с разным наклоном боковых граней и поставив их одну на другую так, чтобы верхняя грань нижней призмы совместилась с нижней гранью верхней (на рисунке приведён пример, когда призмы треугольные). Более сложно привести пример выпуклого многогранника с таким свойством. Подойдёт, например, куб, на каждой грани которого, как на основании, построена правильная четырёхугольная пирамида с двугранными углами при основании равными 45°. В самом деле, боковые грани различных пирамид с общим ребром — ребром куба — при этом образуют единую грань, которая будет ромбом, поэтому все грани построенного многогранника будут ромбами, и все эти ромбы разобьются на пары с параллельными другу другу соответствующими сторонами. С другой стороны, у многогранника будет 14 вершин: к 8 вершинам куба добавятся 6 вершин пирамид, поэтому он не может оказаться параллелепипедом.



к решению задачи 11.2

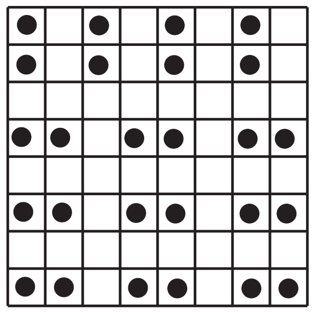
(**11.3**) *Существуют ли* 2000 *последовательных натуральных чисел, среди которых ровно* 10 *простых?*

Решение. Для любого натурального числа n обозначим через $x(n)$ количество простых чисел в наборе $\{n,\, n+1,\, \ldots n+1999\}$. Тогда вопрос задачи будет звучать так: существует ли натуральное число n такое, что $x(n) = 10$? Покажем, что ответ на него положителен.

Заметим, что $x(1) > 10$ (числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, … — простые) и что $x(2001!+2) = 0$, так как для любого натурального $n < 2000$ число $2001!+n$ делится на n и не равно n. Кроме того, видим, что $x(n+1) = x(n)$, если оба числа n и $n+2000$ простые или они оба составные, $x(n+1) = x(n)+1$, если число n — составное, а число $n+2000$ — простое и $x(n+1) = x(n)-1$, если, наоборот, число n — простое, а число $n+2000$ — составное. Таким образом, при переходе от n к следующему числу $n+1$ величина $x(n)$ меняется не более, чем на 1. В силу дискретной непрерывности для некоторого натурального n (при этом $1 < n < 2001!+2$) число $x(n)$ примет значение 10.

ОТВЕТ: Да, существуют.

(**11.4**) *Какое наибольшее количество королей можно поставить на изначально пустую шахматную доску* 8×8 *так, чтобы каждый король был под боем не более одного другого короля?*



к решению задачи 11.4

Решение. Два бьющих друг друга короля могут стоять либо в клетках, имеющих общую сторону (назовём такую пару *линейной*), либо общую вершину (*диагональная* пара). Кроме того, на доске могут быть короли, которые не бьют никакого другого (*одиночные*). Подсчитаем число вершин клеток, которые бьют все короли. Одиночный король бьёт 4 вершины, диагональная пара 7 вершин, а линейная 6. Общее число вершин на доске 81. Следовательно, если удастся выставить x диагональных пар, y линейных пар, и z одиноких королей, то будет выполнено неравенство $7x+6y+4z \leqslant 81$. Общее число королей при этом равно $n = 2x+2y+z$. Тогда $81 \geqslant 3(2x+2y+z)+y+z = 3n+y+z \geqslant 3n$, откуда $n \leqslant 27$. Но при $n = 27$ число $z = n-2x-2y$ — нечётно, поэтому $z \neq 0$ и последнее неравенство цепочки строгое, откуда $n < 27$ — противоречие. Итак, $n \leqslant 26$. Пример расстановки 26 королей приведён на рисунке.

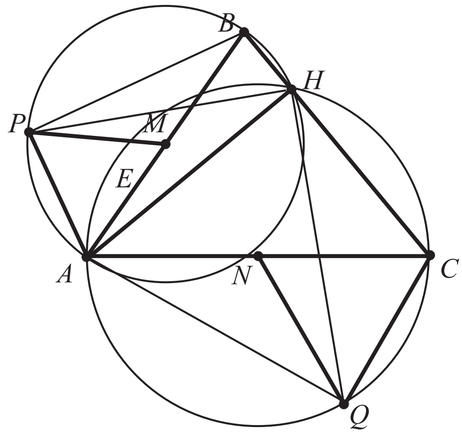
Ответ: 26.

(**11.5**) *Известно, что для всех действительных чисел x имеет место неравенство* $|a + b\cos x + \cos 2x + c\cos 3x| \leqslant 1$. *Докажите, что* $a = b = c = 0$.

Решение. Обозначим $f(x) = a + b\cos x + \cos 2x + c\cos 3x$. Подставляя в неравенство из условия точки $x = 0$, $x = \pi$ и $x = \pi/2$, получаем систему двойных неравенств $\begin{cases} -2 \leqslant & a+b+c & \leqslant 0 \\ -2 \leqslant & a-b-c & \leqslant 0 \\ & 0 \leqslant a \leqslant 2 & \end{cases}$. Складывая первые два неравенства, получаем (с учётом третьего), что $a = 0$. При $a = 0$ из первых двух неравенств системы получаем, что $b+c \geqslant 0$ и $b+c \leqslant 0$, т.е. $c = -b$. Функция $f(x)$ с учётом доказанного принимает вид $f(x) = b(\cos x - \cos 3x) + \cos 2x$. Предположим, что $b \neq 0$. Тогда $f(\pi/2) = -1$, а $f'(\pi/2) = b(-\sin x + 3\sin 3x) - 2\sin 2x|_{x=\pi/2} = -4b \neq 0$. Поэтому существует окрестность точки $x = \pi/2$, в которой функция $f(x)$ монотонна. Это означает, что либо слева, либо справа от точки $x = \pi/2$ существуют такие значения x, при которых $f(x) < -1$, что противоречит условию задачи. Значит $b = 0$, $c = -b = 0$ и $a = 0$, что и требовалось доказать.

(**11.6**) *Пусть M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, треугольники APM и NQC — правильные, построенные вне треугольника ABC, точка H — проекция точки A на прямую BC . Докажите, что угол PHQ — прямой.*

Решение.



к решению задачи 11.6.

Первый способ. Треугольник PMB — равнобедренный, с углом 120° при вершине M, поэтому $\angle MPB = 30^\circ$. Тогда $\angle APB = \angle APM + \angle MPB = 90^\circ$, поэтому точка P лежит на окружности с диаметром AB (см. рисунок). Это же справедливо и для точки H. Но тогда углы $\angle BHP$ и $\angle BAP$ равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Так как треугольник APM — правильный, то $60^\circ = \angle MAP = \angle BAP = \angle BHP$. Аналогично рассуждая, видим, что окружность с диаметром AC содержит точки H и Q, откуда $\angle CHQ = \angle CAQ = 30^\circ$. Тогда $\angle PHQ = 180^\circ - \angle CHQ - \angle BHP = 90^\circ$, что и требуется доказать.

Второй способ. Заметим, что по условию $PM = AM = MB$, откуда точки A, P, B лежат на окружности с центром в M. AB — ее диаметр. Но тогда и точка H находится на той же окружности (треугольник AHB — прямоугольный). Отсюда вписанный угол $\angle PHA$ в два раза меньше центрального $\angle PMA = 60^0$, то есть $\angle PHA = 30^0$.

Повторяя рассуждения имеем, что H также лежит на окружности с центром Q, $\angle QHA = \angle ANQ/2 = 90^0 - \angle CNQ/2 = 60^0$. Складывая, получаем $\angle QHP = \angle QHA + \angle PHA = 90^0$