X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2010 — 2011 учебный год

5 — 6 класс

(**5—6.1**) В пакете 9 кг крупы. Как при помощи чашечных весов и единственной гири весом 200 г за три взвешивания отмерить ровно 2 кг крупы?

(**5—6.2**) Имеется 5 электрических розеток и 10 тройников. Какое наибольшее число электроприборов можно включить в сеть с их помощью? (Суммарное количество включённых в каждый тройник электроприборов и тройников не более трёх, а в розетку может быть включён или один тройник, или один электроприбор, или ничего.)

(**5—6.3**) Билет с шестизначным номером назовём *почти счастливым*, если сумма каких-либо трёх его цифр равна сумме трёх оставшихся. Рома и Миша взяли в троллейбусе два билета с подряд идущими номерами, и оба билета оказались почти счастливыми. Докажите, что среди 12 цифр этих билетов обязательно встретится цифра 0.

(**5—6.4**) На столе лежат 20 одинаковых монет: 5 орлом вверх и 15 орлом вниз. От вас требуется разложить монеты в две кучки (возможно, перевернув некоторые из монет) так, чтобы в первой и второй кучках монет, лежащих орлом вверх, было одинаковое количество. При этом у вас завязаны глаза, поэтому вы не можете видеть, как именно лежат монеты, а на ощупь отличить решку от орла вы тоже не можете.

(**5—6.5**) Барон Мюнхгаузен утверждает, что на Сырном острове имеются четыре области, каждая в форме треугольника, и при этом любые две из них имеют общую границу в виде отрезка ненулевой длины. Могут ли слова барона оказаться правдивыми?

(**5—6.6**) Мальвина продиктовала Буратино два слова: ПЯТАК и ПЯТКА. Однако при написании этих слов Буратино заменил одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так что вместо слов образовались два пятизначных числа. В наказание Мальвина заставила Буратино найти максимальное число, на которое делится каждое из написанных им чисел. У Буратино получилось, что это число 117.

а) Докажите, что Буратино ошибся.

б) Какое наибольшее число мог получить Буратино, если бы не ошибался в счёте?

Составители: Шевалдин В.Т., Нохрин С.Э., Хлопин Д.В.

X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

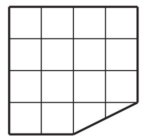
2010 — 2011 учебный год

7 класс

(**7.1**) Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}.$$

(**7.2**) Покажите, как замостить плоскость одинаковыми плитками вида, изображённого на рисунке? Плитки разрешается поворачивать и переворачивать.



к условию задачи 7.2.

(**7.3**) Назовём натуральное число *замечательным*, если оно является наименьшим числом из всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Все замечательные числа упорядочили по возрастанию. Какова сумма цифр у 2011-го по счёту замечательного числа? Ответ обосновать.

(**7.4**) В некоторой компании каждый сотрудник либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (говорит только ложь). Каждый сотрудник сказал про каждого другого: “Он лжец” или “Он рыцарь”. Всего слово “лжец” прозвучало 2010 раз. Какое наименьшее число сотрудников может работать в такой компании?

(**7.5**) На столе лежат 20 одинаковых монет: 5 орлом вверх и 15 орлом вниз. От вас требуется разложить монеты в две кучки (возможно, перевернув некоторые из монет) так, чтобы в первой и второй кучках монет, лежащих орлом вверх, было одинаковое количество. При этом у вас завязаны глаза, поэтому вы не можете видеть, как именно лежат монеты, а на ощупь отличить решку от орла вы тоже не можете.

(**7.6**) Река с параллельными берегами имеет ширину 100 м. На одном её берегу имеется пристань. Требуется на катере проплыть от пристани до противоположного берега. Река всюду судоходна, но на ней имеется единственный остров, про который известно только то, что периметр острова равен 800 м. Докажите, что, какой бы ни была форма острова и в каком бы месте реки (по отношению к пристани) он ни располагался, можно выполнить задание, проплыв при этом не более 300 м. Течение реки слабое и движению катера не мешает.

X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2010 — 2011 учебный год

8 класс

(**8.1**) **(Посвящается чемпионату мира по футболу 2018 года.)** На футбольном поле тренируются 7 игроков: Саша Денисов и шесть футболистов сборной России: Аршавин, Билялетдинов, Жирков, Игнашевич, Кержаков и Павлюченко. Дик Адвокат разрешает им отдавать друг другу пасы только по полю (а не по воздуху), поэтому, если между какими-то двумя игроками стоит третий игрок, пас от первого второму невозможен. Оказалось, что Аршавин может отдать пас только Кержакову, Павлюченко и Билялетдинову; Кержаков не может отдать пас Билялетдинову и Игнашевичу; Билялетдинов не может отдать пас, кроме Кержакова, ещё и Жиркову. Перечислите всех футболистов сборной России, которым может отдать пас Саша Денисов, если известно, что никакие четыре игрока не располагаются на одной прямой. (Предполагается, что все тренирующиеся стоят на месте и не перемещаются по полю.)

(**8.2**) **(2011 год — год Кролика).** Весь прошлый год Кролик провёл в вычислениях и нашёл-таки наибольшее натуральное число N, для которого число $N^{2010}+1$ простое. А сколько цифр содержит десятичная запись такого числа N?

(**8.3**) Каждый зритель Арканзаса, пришедший на спектакль “Королевский жираф”, принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля зрители закидали обоих актеров (короля и герцога) своими припасами, причем каждый принесенный предмет попал либо в короля, либо в герцога. Оказалось, что на долю каждого из них досталось поровну предметов. Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть всей капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

(**8.4**) На основании AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили две различные точки F и E, а на сторонах AB и BC — соответственно точки D и G так, что $AC = AD + AE = CF + CG$. Найдите угол между прямыми DF и EG, если $\angle ABC = 70°$.

(**8.5**) Как-то на стройку привезли несколько блоков общим весом 100 пудов. Оказалось, что суммарный вес трёх самых лёгких блоков равняется 25 пудам, а трёх самых тяжёлых — 35 пудам. Также известно, что веса всех блоков различны и, кроме того, блок может весить и нецелое число пудов. Сколько блоков привезли на стройку? Ответ обосновать.

(**8.6**) Компьютерная программа работает следующим образом: ровно в полдень, т.е. в 12 часов 00 минут, она выдаёт на экран случайно выбранное натуральное число, а затем спустя каждую минуту меняет его, прибавляя к написанному на экране числу сумму его цифр. Вчера в 14 часов 30 минут на экране появилось число 2011.

а) Докажите, что число, выбранное машиной вчера в полдень, не равнялось 3.

б) Докажите, что число, выбранное машиной вчера в полдень, не равнялось 2.

X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2010 — 2011 учебный год

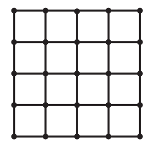
9 класс

(**9.1**) **(Посвящается победе молодёжной сборной России на чемпионате мира по хоккею 2011 года.)** На льду Дворца спорта хоккеисты сборной России отрабатывают технику паса. Им разрешено отдавать шайбу друг другу только по льду (а не по воздуху), поэтому, если между какими-то двумя игроками стоит третий, пас от одного другому невозможен. В какой-то момент тренировки оказалось, что хотя ни на одной прямой не находится более трёх хоккеистов, у каждого игрока имеется партнёр, которому он не может отдать пас. Какое наименьшее число хоккеистов участвовало в тренировке? Ответ обоснуйте.

(**9.2**) Известно, что $x + 3y + 2z = 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{4z+2} < 11/2.$$

(**9.3**) 40 бикфордовых шнуров длиной 1 метр каждый имеют синий и красный конец. Огонь распространяется вдоль бикфордова шнура только в направлении от синего конца к красному концу, но не наоборот. Требуется из шнуров собрать квадратную решётку 4×4 м (см. рисунок). Можно ли при этом составить шнуры таким образом, чтобы полученную решётку нельзя было сжечь полностью, поджигая её в любых 12 местах? (В узлах решётки огонь переходит с красного конца на все примыкающие к нему синие концы.)



к условию задачи 9.3.

(**9.4**) Докажите, что для всех чисел a, b, c из отрезка $[0;\ 1]$ справедливо неравенство

$$a + b + c \leqslant 2 + abc.$$

(**9.5**) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_2B_1B, BB_2C_1C и CC_2A_1A. Всегда ли из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 можно составить треугольник? Ответ обоснуйте.

(**9.6**) Пусть $S(x)$ обозначает сумму цифр десятичной записи натурального числа x. Существует ли такое натуральное a ($a \geqslant 10$), что уравнение $a = x + S(x)$

а) не имеет решений в натуральных числах;

б) имеет ровно 2 решения в натуральных числах;

в) имеет более 2 решений в натуральных числах?

X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2010 — 2011 учебный год

10 класс

(**10.1**) Решите неравенство
$$x^2 \leqslant [2x] \cdot \{2x\}.$$
Здесь $[y]$ — целая часть числа y, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее y, а $\{y\} = y - [y]$ — дробная часть числа y.

(**10.2**) В сундуке Билли Бонса лежат золотые, серебряные и медные монеты общим числом 120 штук. Монеты лежат в пяти различных отделениях, при этом ни в каких двух отделениях в сумме не наберётся 30 золотых монет, и ни в каких трёх отделениях не наберётся 20 серебряных монет. Докажите, что в каких-нибудь четырёх отделениях наберётся не менее 15 медных монет.

(**10.3**) Пусть M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, треугольники APM и NQC — правильные, построенные вне треугольника ABC, точка R лежит на стороне BC и делит её в отношении $3 : 1$, считая от точки B. Докажите, что угол PRQ — прямой.

(**10.4**) Докажите, что для любых чисел x и y верно неравенство
$$|\cos x| + |\cos y| + |\cos (x + y)| \geqslant 1.$$

(**10.5**) Докажите, что для любых натуральных чисел x, y, z можно подобрать такое натуральное число a, что число
$$(x^2y^2 + a)(y^2z^2 + a)(z^2x^2 + a)$$
будет квадратом натурального числа.

(**10.6**) На земле лежат 2011 палочек, все разной длины. Всегда ли можно разломить одну из палочек на 2 части (не обязательно равные) так, чтобы получившиеся 2012 палочек можно было бы разложить на две группы суммарной равной длины по 1006 палочек в каждой? Ответ обоснуйте.

X ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2010 — 2011 учебный год

11 класс

(**11.1**) Найдите все пары действительных чисел $(x,\, y)$, которые удовлетворяют неравенству

$$y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \leqslant 3xy.$$

(**11.2**) В одном старом учебнике геометрии дано такое определение призмы: "Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы." Приведите пример многогранника, удовлетворяющего этому определению, но не являющегося призмой.

(**11.3**) Существуют ли 2000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 10 простых?

(**11.4**) Какое наибольшее количество королей можно поставить на изначально пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы каждый король был под боем не более одного другого короля?

(**11.5**) Известно, что для всех действительных чисел x имеет место неравенство

$$|\, a + b\cos x + \cos 2x + c\cos 3x| \leqslant 1.$$

Докажите, что $a = b = c = 0$.

(**11.6**) Пусть M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, треугольники APM и NQC — правильные, построенные вне треугольника ABC, точка H — проекция точки A на прямую BC. Докажите, что угол PHQ — прямой.