ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2013–2014 учебный год

5 — 6 класс

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать на плоскости десятиугольник, у которого все стороны располагаются ровно на пяти прямых. Не завирает ли барон? (*7 баллов*)

2. Буржуины заплатили несколько долларов Плохишу за то, чтобы он предал Мальчиша-Кибальчиша. Плохиш хочет купить на эти деньги варенье, печенье и конфеты. Если он купит только банку варенья, то у него останется три доллара, если только корзину печенья — то четыре доллара, а если только коробку конфет, то останется восемь долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить банку варенья и корзину печенья? (*7 баллов*)

3. Агентство науки и дошкольного образования решило начать подготовку к ЕГЭ в группах одного детского сада (всего в саду 250 малышей). Каждый малыш должен построить один вертикальный столбик из 5 кубиков. Для постройки столбиков дети могут использовать кубики трех цветов: красного, синего и белого, причем все кубики имеют один и тот же размер. Чиновники требуют, чтобы среди этих 250 столбиков не было двух одинаковых. Смогут ли воспитатели детского сада (или родители) помочь детям выполнить приказ? (*7 баллов*)

4. Больному требуется наложить компресс и держать его ровно 20 минут. Как их отмерить, имея только двое песочных часов: одни на 9 минут, вторые — на 7 минут? Песочные часы отмеряют ровно установленный промежуток времени и останавливаются, в любой момент после остановки их можно запускать заново. (*7 баллов*)

5. Можно ли копиями плитки, изображённой на рисунке (A, B, M, N — некоторые положительные числа), замостить (т.е. покрыть без наложений) всю плоскость, если плитки можно поворачивать на любой угол и даже переворачивать? Решите задачу в следующих случаях:

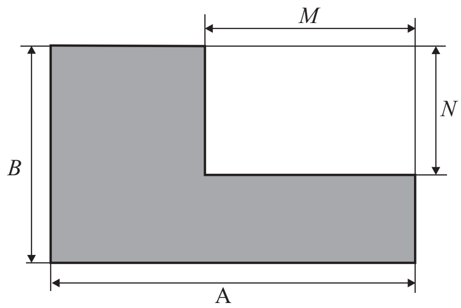
1) $A = B = 2,\ \ M = N = 1$.

2) $A = 2014,\ \ B = 2,\ \ M = 2011,\ \ N = 1$.

3) $A = 5,\ \ B = 3,\ \ M = 1,\ \ N = 1$.

4) $A \geqslant 2$ и $B \geqslant 2$ — произвольные целые числа, $M = 1,\ \ N = B - 1$.

5) A, B, M, N — произвольные положительные числа (не обязательно целые), $M < A,\ \ N < B$.



К задаче 5

(*14 баллов*)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

2013–2014 учебный год

7 класс

1. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов, и Винни-Пух пошел по прямой к дому Кристофера Робина, а Пятачок — к пчелиному дуплу (тоже по прямой). Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились, причём ни тот, ни другой не успели дойти до своих целей. Сколько времени могло продолжаться их путешествие (с момента выхода из дома до встречи)? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время. (*7 баллов*)

2. По лыжне кольцевого маршрута с постоянными скоростями бегут Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а Старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой — каждые 3 минуты. Крокодил Гена, двигаясь по лыжне, иногда обгоняет Чебурашку. Сколько минут проходит между такими обгонами? (*7 баллов*)

3. На доске записано 2013 натуральных чисел. Докажите, что одно из них можно стереть так, чтобы сумма оставшихся чисел была четной. (*7 баллов*)

4. Жили-были дед да баба, ели кашу с молоком ... из одной тарелки. Начали они есть кашу одновременно, на разговоры не отвлекались. Если бы дед ел со скоростью бабы, то кашу они ели бы на 3 минуты дольше, а если бы наоборот, баба ела со скоростью деда, то кашу съели бы на 2 минуты быстрее. Определите, за какое время дед и баба съели кашу вместе. (*7 баллов*)

5. Знайка выдал Незнайке некую конструкцию, составленную из пустых ячеек. Незнайка заполняет ячейки камушками по следующему правилу: каждым ходом он выбирает одну из незаполненных ячеек и кладет в неё на один камушек больше, чем количество соседних ячеек, в которых уже есть камни (в частности, первым ходом он кладёт один камень в некоторую пустую ячейку). Незнайка действует так до тех пор, пока в конструкции есть хотя бы одна пустая ячейка. Знайке неизвестно, в каком порядке Незнайка будет заполнять ячейки. Тем не менее, он утверждает, что знает, сколько всего камней окажется в конструкции в итоге. Прав ли Знайка, если:

1) конструкция — это квадрат 2×2, разбитый на 4 единичных квадрата-ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

2) конструкция — это равносторонний треугольник со стороной 2, разбитый средними линиями на 4 малых треугольники — ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

3) конструкция — это прямоугольник 3×4, разделённый на единичные квадраты, каждый из которых, в свою очередь, разделён диагональю (из левого нижнего угла в правый верхний) на две треугольные ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

4) конструкция — это куб $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков-ячеек; соседними считаются ячейки, которые имеют общую грань;

5) конструкция — это куб $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков-ячеек; соседними считаются ячейки, которые имеют или общую грань или общее ребро?

(*14 баллов*)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2013–2014 учебный год

8 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число n, обладающее следующими свойствами:

1) его запись в десятичной системе заканчивается цифрой 6 (т.е. в разряде единиц стоит цифра 6);

2) если зачеркнуть последнюю цифру 6 и записать цифру 6 перед оставшимися цифрами, то полученное число будет в 4 раза больше, чем исходное. (*7 баллов*)

2. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника и всех его сторон наименьшая. (*7 баллов*)

3. В квартире почетного долгожителя Кощея Алибабаевича был прописан сам хозяин и несколько его жён. Средний возраст прописанных перед моментом смерти Кощея составлял ровно 25 лет, а сразу после его смерти — ровно 24 года. Сколько на момент смерти было жён у Кощея Алибабаевича, если он умер в возрасте 831 года? (*7 баллов*)

4. Имеется 100 правильных треугольников со стороной 1. У каждого треугольника одна сторона белая, одна сторона синяя, и одна сторона красная. Из этих треугольников составлен правильный треугольник со стороной 10, при этом каждые два соседних маленьких треугольника приложены друг к другу одноцветными сторонами. Докажите, что на границе большого треугольника белых, красных и синих отрезков одинаковое количество. (*7 баллов*)

5. Имеются шашки N цветов, причём шашек каждого цвета сколь угодно много. Двое играют в следующую игру: каждым ходом первый дает второму одну шашку, цвет которой выбирает сам, а второй помещает её в свободную клетку доски 8×8 (по своему усмотрению). Спустя 64 хода игра завершается. При этом второй стремится получить квадрат наибольшего размера (стороны квадрата параллельны сторонам доски), полностью заставленный шашками одного цвета, а первый — ему помешать. Каков наибольший размер одноцветного квадрата может при этом получится, если оба действуют наилучшим образом? Рассмотрите следующие случаи:

1) $N = 22$;
2) $N = 4$;
3) $N = 2$;
4) $N = 5$;
5) $N = 6$.

(*14 баллов*)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2013–2014 учебный год

9 класс

1. В квадрате $ABCD$ проведены два взаимно перпендикулярных отрезка MN и PQ (M — точка на отрезке CD, N — точка на отрезке AB, P — точка на отрезке AD, Q — точка на отрезке BC, O — точка пересечения MN и PQ). Докажите, что сумма периметров четырехугольников $APON$ и $CMOQ$ равна сумме периметров четырехугольников $BQON$ и $OMDP$. (Точка O не обязательно является центром квадрата). *(7 баллов)*

2. В Партизанском крае имеется кольцевая железная дорога, на которой расположены 6 станций и вокзал. Кроме того каждая не соседняя по кольцу с вокзалом станция напрямую соединена с вокзалом отдельным железнодорожным перегоном (см. прилагаемую схему). Два партизанских отряда поочередно выбирают и уничтожают один из перегонов (в начальный момент перегонов 11). Звание Гвардейского получает тот партизанский отряд, после очередной диверсии которого с одной из станций нельзя доехать до вокзала (даже через другие станции). Докажите, что начавший “рельсовую войну” отряд при любых действиях второго отряда имеет возможность получить звание Гвардейского. *(7 баллов)*

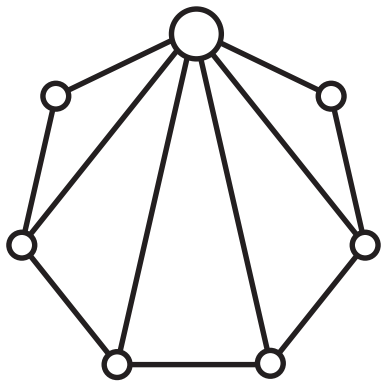


схема ж/д путей (к задаче 2)

3. Докажите неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\ldots+\sqrt[3]{24}}}}}_{n\text{ корней}}+\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots+\sqrt{42}}}}}_{m\text{ корней}}<10.$$

(Здесь m и n — произвольные натуральные числа.) *(7 баллов)*

4. Царь решил наградить своего лучшего полководца, позволив ему вынести из царского фонда столько золота, сколько он сможет унести за один раз. Известно, что золото хранится в слитках. Веса этих слитков могут быть самые разные, но вес любого слитка не превосходят 10 кг. Также известно, что в царском фонде золота значительно больше тонны. К сожалению, полководец уже стар и не может нести более 40 кг. Какое наибольшее количество золота сможет гарантированно вынести полководец при этих условиях? *(7 баллов)*

5. Расположите на плоскости N фигур, не налегающих друг на друга так, чтобы выполнялось следующее условие:

Как бы ни покрасить эти фигуры тремя красками (каждую фигуру в один свой цвет), обязательно какие-нибудь две фигуры одного цвета будут иметь общий участок границы (одна общая точка не считается “участком”). Рассмотрите случаи:

1. $N = 4$, а фигуры — произвольные (не обязательно равные) многоугольники на Ваш выбор;
2. $N = 6$, а фигуры — квадраты произвольных (не обязательно равных) размеров;
3. $N = 4$, а фигуры — произвольные треугольники;
4. N — любое натуральное число на Ваш выбор, а фигуры — однаковые квадраты;
5. $N = 11$, а фигуры — однаковые квадраты; *(14 баллов)*

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2013–2014 учебный год

10 класс

1. Существуют ли три таких числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трехчлена, то он имеет два различных положительных корня, а если в другом — два различных отрицательных? (*7 баллов*)

2. Дана неубывающая последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots$, такая, что $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$ при $n \geqslant 1$. Известно, что $b_7 = 120$. Найдите b_8. (*7 баллов*)

3. Изобретатель придумал чертёжный прибор, позволяющий поделить любой заданный отрезок на две равные части (то есть указать его середину). Можно ли, используя только этот прибор и обычную линейку (без делений), разделить произвольный отрезок на три равные части? (*7 баллов*)

4. В современном футболе считается, что команда идёт по чемпионскому графику, если она выигрывает дома и играет вничью в гостях. В высшей лиге чемпионата России играют 16 команд. Турнир проводится по круговой системе в два круга (т.е. каждая команда с каждой играет дважды: один раз — в гостях, один — дома). Какое самое низкое место может занять в чемпионате России команда, идущая по чемпионскому графику? (В футболе за победу команда получает три очка, за ничью — одно, за поражение очков не получает; более высокое место занимает команда, набравшая больше очков по итогам всего турнира. В случае равенства очков у двух или более команд места между ними распределяются по дополнительным показателям, можно для простоты считать, что по жребию.) (*7 баллов*)

5. Используя знаки четырёх арифметических действий, числа, скобки, знак модуля и обозначение для неизвестного (перечисленные элементы можно использовать по несколько раз), а также знак равенства, напишите уравнение, множеством всех решений которого является

1) бесконечное множество точек на числовой прямой;
2) объединение двух лучей $(-\infty; -1]$ и $[1; \infty)$ числовой прямой;
3) объединение отрезков $[0; 1]$ и $[3; 5]$ числовой прямой;
4) квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ плоскости xOy;
5) граница квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$ плоскости xOy.

(В пунктах 4 и 5 требуется составить уравнение от двух переменных: x и y. Приводить решения полученных уравнений не требуется.) (*14 баллов*)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2013–2014 учебный год

11 класс

1. На доске начерчен выпуклый четырехугольник. Наташа утверждает, что его можно разрезать диагональю на два остроугольных треугольника, Маша — что его можно разрезать на два прямоугольных треугольника, а Вера — что на два тупоугольных треугольника. Оказалось, что ровно одна девочка не права. Про кого из девочек можно наверняка утверждать, что она права? (*7 баллов*)

2. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, d, лежащих на отрезке $[-1;\,1]$, выполнено неравенство $|ac+ad+bc-bd|\leqslant 2$. (*7 баллов*)

3. Пусть дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что в ней либо существует бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо существует бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему. (*7 баллов*)

4. В квадрате $ABCD$ точка M лежит на стороне AB, а точка N — на стороне CD. P — точка пересечения отрезков CM и BN, а точка Q — точка пересечения отрезков MD и AN. Докажите, что длина отрезка PQ не меньше половины стороны квадрата. (*7 баллов*)

5. Инопланетянин Z живёт в двумерном мире, то есть в плоскости. Однажды Z решил позагорать. Z хочет, чтобы каждая точка на границе его тела была освещена лучами не меньше 1 минуты. При этом Z может вертеться в плоскости как угодно, а лучи света идут внутри плоскости параллельно оси OX в том же направлении, что и ось. Точка поверхности тела считается освещённой, если на неё не падает тень ни от какой другой точки тела инопланетянина.

1) Докажите, что если Z имеет форму квадрата, то он не сможет загореть быстрее, чем за 2 минуты;

2) Докажите, что если Z имеет форму треугольника, то он не сможет загореть быстрее, чем за 1,5 минуты.

3) Сможет ли Z загореть быстрее, чем за 2 минуты, если Z — сектор круга с тупым центральным углом α?

4) Верно ли, что если Z имеет форму выпуклого четырёхугольника, то он не сможет загореть быстрее, чем за 1,5 минуты?

5) Верно ли, что если Z имеет форму выпуклого n-угольника ($n>4$), то он не сможет загореть быстрее, чем за 1,5 минуты?

(*14 баллов*)