5 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

5.1. *Один мальчик всегда врёт по воскресеньям и говорит только правду по вторникам и средам. (В остальные дни недели он может сказать как правду, так и ложь.) Шесть дней подряд этого мальчика просили назвать своё имя. Ответы были такими: Максим, Игорь, Максим, Игорь, Олег, Игорь. Как его зовут на самом деле? Ответ обоснуйте.*

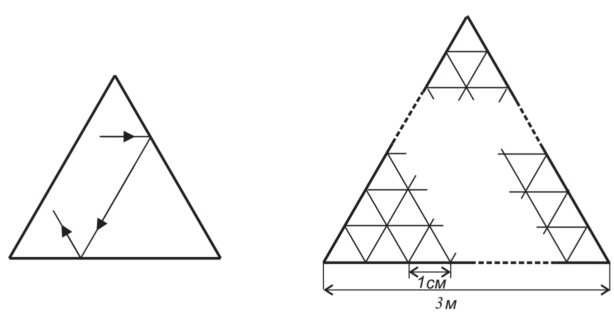
Решение. Определим дни недели, в которые проводился опрос. Если среди них были бы и вторник, и среда, то в эти дни мальчик ответил бы одно и то же. Но двух последовательных одинаковых ответов нет. Значит, либо вторник, либо среда в дни опроса не попали. Остаётся 2 случая.

1) Опрос не проводился во вторник. Тогда в первый день была среда, и мальчик сказал правду. Его имя в этом случае Максим. Воскресенье пришлось на пятый день опроса, ответ (Олег) — ложен, всё сходится.

2) Опрос не проводился в среду. Тогда в последний день опроса был вторник, и мальчик сказал правду. Его имя тогда Игорь. Но в этом случае воскресенье приходится на 4-й день опроса, и ответ мальчика в этот день (Игорь) должен быть ложным, что не так. Противоречие.

Ответ: Максим.

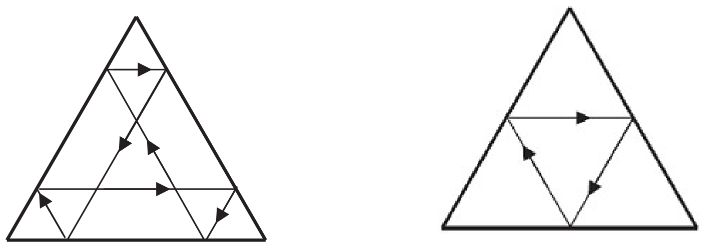
5.2. *Бильярдный стол имеет форму равностороннего треугольника без луз. Сторона треугольника равна 3 м. Параллельно одной его из сторон запускают бильярдный шар, который, отразившись от борта стола, всегда будет двигаться параллельно другой его стороне (см. рисунок). При движении шар оставляет за собой след: тонкую хорошо различимую линию. Какое наименьшее количество раз надо запустить шар, чтобы поверхность стола полностью покрылось треугольной сеткой со стороной треугольника 1 см? Ответ обоснуйте. Предполагается, что шар после удара движется неограниченно долго без снижения скорости.*



к условию задачи 5.2

Решение. Можно без ограничения общности считать, что начальное положение шара находится в одной из самых низких точек его траектории, т. е. на нижнем борте стола. Заметим, что после соударения с каждым из двух других бортов, шар снова отлетит к нижнему борту, причём в точку, симметричную начальному положению (см. рисунок). Затем, вновь стукнувшись последовательно об два других борта, шар вернётся в исходную точку и далее будет двигаться по уже пройденному маршруту, не оставляя новых следов.

Исключением будет случай, когда шар изначально стоял в середине борта, тогда траектория зациклится раньше, после первого же возвращения шара на нижний борт. Значит, при каждом запуске шар «посетит» нижний борт дважды, кроме одного случая, когда такое посещение будет единственно. Требуемая треугольная сетка разбивает нижний борт на 300 односантиметровых отрезка; они дают 299 точек посещения нижнего борта. Всего потребуется, следовательно, не меньше, чем $\frac{299-1}{2}+1=150$ раз запустить шар. При этом такого количества хватит: достаточно запускать шар из всех точек сетки, расположенных на нижнем борту не правее середины этого борта.



к решению задачи 5.2

Ответ: 150 раз.

5.3. *Вера, Надя и Люба собирали грибы. Вера набрала вдвое меньше грибов, чем Надя и Люба вместе взятые. Надя набрала впятеро меньше грибов, чем Вера и Люба вместе взятые. У кого грибов больше: у Любы или у Нади с Верой, вместе взятых? Ответ обоснуйте.*

Решение. Так как Надя набрала впятеро меньше грибов, чем Вера и Люба вместе взятые, количество грибов, собранных Верой и Любой вместе нацело делится на 5. Разложим все эти грибы в 5 одинаковых (по числу грибов) кучек; шестую кучку пусть составляют грибы Нади. Отложим в сторону две кучки из числа набранных Верой и Любой; останется четыре кучки, что в 2 раза больше. Значит, можно считать, что отложенные две кучки собрала Вера, а остальные (в количестве 3) — Люба. Итого, Вера и Надя вместе собрали 3 кучки грибов, Люба — столько же.

Ответ: Грибов поровну.

5.4. *Вовочка стал владельцем компании и теперь работает над различными проектами. Новые проекты он начинает каждые два дня, а работа над каждым новым проектом занимает ровно на* 1 *день больше, чем над предыдущим. Первый свой проект Вовочка начал 1 февраля* 2018 *г. и закончил его в течение этого дня. Найдите ближайшую дату, когда Вовочка будет работать над десятью проектами одновременно.*

Решение. Для удобства работы переведём все даты в числа февраля, т. е. будем считать, что 1 марта — это 29 февраля, 2 марта — 30 февраля, и. т. д.

Заметим, что чем больше номер проекта, тем он позже начинается и дольше делается, поэтому и завершится позже. Значит, Вовочка будет работать над 10-ю проектами одновременно в те (и только те) дни, в которые проект с некоторым номером k уже начнётся, а проект с номером $k-9$ ещё не закончится. Заметим, что k-й по счёту проект (k — натуральное число) начинается $2k-1$-го февраля. $k-9$-й проект начнётся, следовательно,

$2k-19$ февраля. Длится $k-9$-й проект ровно $k-9$ дней, поэтому последний день, в который Вовочка будет над ним работать, это $(2k-19)+(k-9)-1 = 3k-29$ февраля. Тогда Вовочка будет работать одновременно над проектами с номерами k и $k-9$ если и только если $3k-29 \geqslant 2k-1$, т. е. при $k \geqslant 28$. Наименьшее такое k — это число 28. Впервые такое случится в день начала проекта с номером k при минимальном k, т. е. $2\cdot 28-1 = 55$ февраля, оно же $55-28 = 27$ марта.

Ответ: 27 марта 2018 года.

5.5. *Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 26 клеток и шириной 1 клетка. В каждую клеточку полоски записали натуральное число так, что числа, записанные в соседних клетках, отличаются ровно на 1. Оказалось, что каждое из записанных чисел встречается во всей полоске одно и то же количество раз. Какое именно количество? Приведите все варианты ответов и докажите, что других нет.*

Решение. Так как все числа использовались одно и то же количество раз, то это количество является делителем общего числа всех записей, т. е. делителем числа 26. Делители 26 — это числа 1, 2, 13 и 26. Так как числа в соседних клетках заведомо различны, никакое число не может быть использовано больше 13 раз, и вариант с 26 отпадает. Пример 1, 2, 1, 2, 1, 2, …, 1, 2 показывает возможность ситуации, когда каждое число использовалось 13 раз, а пример 1, 2, 3, 4, …, 26 — ситуации, когда 1 раз. Покажем, что ситуация, когда каждое число использовалось ровно 2 раза, невозможна. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что наименьшее использованное число равно 1 (если это не так, уменьшим все записанные числа на одну и ту же величину). Тогда использованы были числа 1, 2, …, 13 (каждое по 2 раза). Всего использовано 12 чётных чисел и 14 нечётных. Но с другой стороны чётные и нечётные числа в полоске чередуются, значит, чётных и нечётных чисел поровну. Противоречие.

Ответ: 1 или 13.

6 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

6.1. *Найдите все трёхзначные натуральные числа, удовлетворяющие одновременно двум условиям:*

1) цифра этого числа в разряде десятков в два раза меньше цифры в разряде единиц;

2) если это число представить в виде произведения простых множителей, то все множители будут одной чётности.

(Напомним, что натуральное число — простое, если оно больше 1*, и делится нацело только на себя и на* 1*.)*

Ответ обоснуйте.

Решение. По условию, последняя цифра числа вдвое больше цифры десятков, поэтому последняя цифра чётная. Значит, само число тоже чётное и одним из его простых делителей является число 2. Но тогда все простые делители числа чётны, т. е. все они равны 2. Значит, число является степенью двойки. Трёхзначных чисел, являющихся степенью числа 2, ровно три: это 128, 256 и 512. Из них только у последнего числа цифра десятков вдвое меньше цифры единиц.

Ответ: 512.

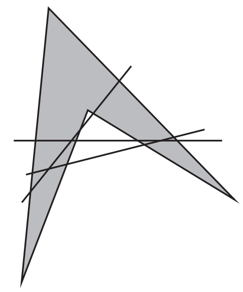
6.2. Доцент и профессор вместе вышли с заседания кафедры и пошли прогуляться (каждый со своей постоянной скоростью) в сторону деканата. Доцент добрался до деканата за минуту и сразу же пошёл обратно на кафедру. Спустя еще 10 секунд он встретил профессора, но прошёл мимо, не останавливаясь. А ещё спустя некоторое время t доцент, так и не дойдя до кафедры, развернулся и вновь пошёл в деканат, которого достиг одновременно с профессором. Сколько секунд составило время t? Ответ обоснуйте.

Решение. Так как доценту от кафедры до деканата ровно 1 минута ходьбы, то за 10 секунд он покроет ровно $1/6$ этого расстояния. Значит, встреча доцента и профессора состоялась в месте, отстоящем от кафедры в 5 раз дальше, чем от деканата. Тогда профессору на момент встречи идти осталось впятеро меньше, чем он прошел. Поскольку до встречи он шел 1 минуту и 10 секунд, то есть 70 секунд, ему осталось идти $70 : 5 = 14$ секунд. Ровно столько же должен провести в дороге и доцент. При этом 10 секунд он потратит на то, чтобы дойти от места встречи до деканата. Оставшиеся $14 - 10 = 4$ секунды потратятся на дорогу от места встречи с профессором в сторону кафедры и обратно до этой же точки. В каждую сторону тратится одно и то же время, значит, в сторону кафедры идти надо $4 : 2 = 2$ секунды.

Ответ: 2 секунды.

6.3. *Существует ли четырёхугольник, который можно разрезать тремя прямыми на* 10 *многоугольников? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пример такого четырёхугольника и способ разрезания приведены на рисунке.



Ответ: Существует.

6.4. *На доску выписаны* 300 *различных натуральных чисел. Все они не больше* 900, *ровно* 200 *из них не превосходят* 600 *и ровно* 100 *— не превосходят* 300. *Кроме того, известно, что разность никаких двух из них не равна* 300, *и не равна* 600. *Найдите сумму всех этих* 300 *чисел. Ответ обоснуйте.*

Решение. Запишем все натуральные числа от 1 до 900 в три столбца следующим образом

1	301	601
2	302	602
3	303	603
$\dots$	$\dots$	$\dots$
k	$k+300$	$k+600$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
300	600	900

Отметим (например, подчёркиванием) те числа, которые были выписаны на доску. Тогда в каждой строке мы подчеркнём не более одного числа, а так как строк 300, т. е. столько же, сколько выписанных чисел, то подчеркнём ровно одно число в каждой строке. Кроме того, будет подчёркнуто ровно по 100 чисел в каждом столбце. Вычтем из каждого подчёркнутого числа второго столбца 300, а из каждого подчёркнутого числа третьего столбца 600, при этом уменьшаемое число как бы перейдёт в первый столбец, но останется в той же строке. Значит, останутся числа 1, 2, 3, $\dots$, 300 по одному разу каждое. Их сумма равна $1+2+\ldots+300=(1+300)+(2+299)+\ldots+(150+151)=150\cdot 301=45015$. Кроме того заметим, что уменьшая числа, мы уменьшили сумму всех подчёркнутых чисел ровно на $300\cdot 100+600\cdot 100=90000$. Значит, сумма всех подчёркнутых (или, что то же самое, всех выписанных на доску) чисел равна $45015+90000=135015$.

Ответ: 135015.

6.5. *Гарри Поттер выкладывает в ряд* 15 *берёзовых и* 15 *дубовых палочек. Изначально он кладет две палочки — берёзовую и дубовую. После этого он кладет по одной палочке между двумя, которые уже лежат. Если Гарри кладет палочку между двумя палочками другого вида (дубовую между двумя берёзовыми или наоборот), то палочка становится волшебной; во всех других случаях она волшебных свойств не приобретает. В итоге оказалось, что никакие две палочки одного вида не лежат рядом. Сколько из* 30 *палочек стали волшебными? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Будем называть *заготовкой* пару лежащих рядом палочек одной породы дерева. Заметим, что если пара лежащих рядом палочек не являлась заготовкой, то положив между ними любую палочку мы создадим ровно одну новую заготовку. Если между палочками заготовки мы положили палочку той же породы дерева, то вместо этой заготовки получатся две новых, а если между палочками заготовки положить палочку другой породы, то заготовка пропадёт, но зато создастся волшебная палочка. Итак, каждым ходом (кроме начального) мы либо создаём ровно одну новую заготовку, либо меняем одну из имеющихся заготовок на волшебную палочку. Так как в начале заготовок не было, и в конце их тоже не оказалось, то ходов, создающих заготовку, было сделано столько же, сколько обменивающих её на волшебную палочку. Ходов 28, значит, волшебных палочек 14.

Ответ: 14 палочек.

7 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

7.1. *Вдоль прямолинейной дороги длиной 39 км, идущей от пункта A, расположены несколько домов. Администрация хочет поставить у дороги автобусную остановку и пустить автобус, курсирующий между этой остановкой и пунктом A (других остановок на маршруте не будет). Скорость автобуса 60 км/ч, пешеходов — 5 км/ч. Можно ли поставить остановку в таком месте дороги, чтобы любой житель домов мог добраться до A, проведя в пути не более 3 часов? Ответ обоснуйте. Время ожидания автобуса на остановке считается равным нулю.*

Решение. Поставим остановку на расстоянии 27 км от A. Те, кто живут на расстоянии не больше 15 км от пункта A, идут пешком. Остальные идут сначала к остановке, потратив на это максимум 12/5 часов, т. е. 2 часа 24 минуты. Время поездки на автобусе займёт 27 минут, то есть такие жители тоже успевают за 3 часа добраться до A.

Примечание. Остановку можно строить в любом месте дороги от $26\frac{2}{11}$ до $27\frac{9}{13}$ км, считая от A. Любой ответ (с обоснованием) в этих пределах засчитывается.

Ответ: Можно.

7.2. *На длинной полоске бумаги написано 18-значное число:*

$$111111222222333333.$$

На какое наибольшее число частей можно разрезать эту полоску бумаги (разрезы делаются только между соседними цифрами) так, чтобы суммы цифр на всех частях были попарно различны? Ответ обоснуйте.

Решение. Сумма цифр этого числа равна $6\cdot 1+6\cdot 2+6\cdot 3 = 36 = 1+2+3+4+5+6+7+8$. Поэтому число нельзя разрезать более, чем на 8 частей с различными суммами цифр, а если разрезать ровно на 8 частей, то все суммы цифр должны встретиться по 1 разу. В частности, не должно быть сумм, больших 8. Будем разрезать полоску с конца. Первым разрезом мы обязаны отрезать одну или две цифры 3, вторым (чтобы не повторяться) соответственно две или одну цифры 3. Останется число, оканчивающееся на 3 тройки, и третий разрез мы осуществить не сможем. Значит, на 8 частей разрезать полоску тоже нельзя. На 7 частей можно разрезать, например, так (1), (1 1 1 1), (1 2 2), (2 2 2), (2 3 3), (3), (3 3 3). Конечно, способ не единственный.

Ответ: На 7 частей.

7.3. *В вершинах куба сидят муравьи, всего 15 муравьёв. Раз в минуту ровно два муравья одновременно переползают (по параллельным рёбрам или по одному тому же ребру) в соседние вершины, причём оба муравья ползут в одинаковом направлении. Верно ли, что при любом изначальном расположении муравьёв все они могут собраться в одной вершине куба? Муравьи считаются точками. Ответ обоснуйте.*

Решение. Разобьём все вершины куба на две грани. Так как 15 — нечётно, на одной из этих граней суммарно находится чётное число муравьёв. Тогда всех этих муравьёв можно собрать на другой грани. Далее, разобьем грань с муравьями на два ребра. На одном из них чётное число муравьёв, и они могут собраться на другом ребре. Теперь на одном из концов этого ребра находится чётное число муравьёв, и они могут переползти в другой его конец.

Ответ: Верно.

7.4. *Костя последовательно выписал 30 натуральных чисел, причём каждое следующее выписанное число (начиная со второго) ровно на 137 больше предыдущего. Докажите, что точными квадратами (т. е. квадратами целых чисел) могут являться не более половины из выписанных чисел.*

Решение. Заметим, что разность квадратов двух целых чисел $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ является произведением двух чисел одинаковой чётности. При этом эта разность бывает равна 137 в единственном случае $a - b = 1$, $a + b = 137$, т. е. должны быть числа 68^2 и 69^2. Кроме того, эта разность не может быть равна $2 \cdot 137 = 274$, так как число 274 нельзя представить в виде произведения двух чисел одинаковой чётности. Следовательно, среди любых трёх последовательных чисел, написанных Костей, не больше одного квадрата (может быть, за исключением тройки с числами 68^2 и 69^2), т. е. квадратов точно не больше $30/3 + 1 = 11 < 15$ штук.

7.5. *Стрелковый полигон имеет форму правильного N-угольника, $N \geqslant 5$. В вершинах этого многоугольника оборудованы позиции для стрелков, а во всех точках пересечения самых коротких диагоналей многоугольника стоят мишени. (Короткой диагональю многоугольника называется диагональ, отсекающая от него треугольник.) В каждой вершине может стоять не более одного стрелка. Каждый стрелок может сделать по одному выстрелу, причём только вдоль короткой диагонали и при условии, что на другом конце этой диагонали нет другого стрелка. При этом выстрел поражает обе мишени на этой диагонали. Для каждого N необходимо выяснить, можно ли расположить стрелков так, чтобы все мишени были поражены.*

а) Найдите хотя бы одно значение N, при котором удастся расставить стрелков указанным образом.

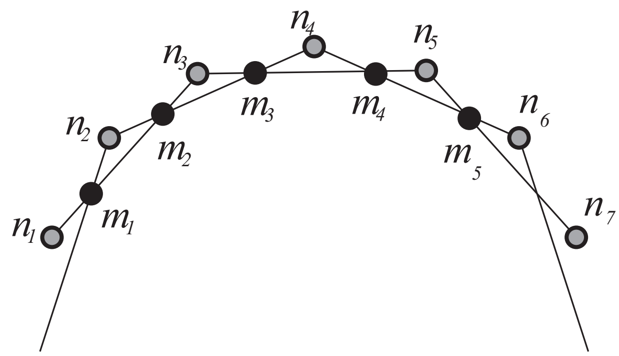
б) Докажите, что для того, чтобы все мишени были поражены, два стрелка, стоящие в соседних вершинах, обязаны стрелять по одной и той же, ближайшей к ним, мишени.

в) Решите задачу при всех N, делящихся на 3.

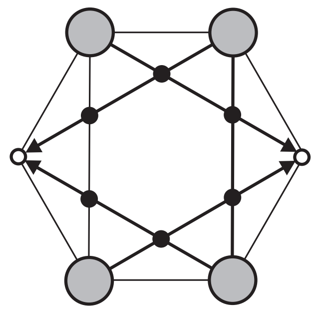
г) Решите задачу при всех N, не делящихся на 3.

д) Докажите, что при любом N можно расставить стрелков так, чтобы они поразили все мишени кроме, может быть, одной.

Решение. Для удобства обозначим позиции для стрелков по часовой стрелке n_1, n_2, …, а мишени m_1, m_2, …, причем мишень m_1 — самая ближайшая по часовой стрелке к n_1 (см. рисунок).



а) Например, $N = 6$. Пример расстановки стрелков (серые круги) и направление их стрельбы (стрелки) указаны на прилагаемой схеме.



б) Покажем, что если на позициях n_3 и n_4 стоят стрелки, то они обязательно должны стрелять по m_3. Пусть это не так. Если никто из них не стреляет в m_3, то, чтобы поразить эту мишень, нужно застрелить кого-нибудь из стрелков на позициях n_3 или n_4. Если только один стреляет по m_3 (без ограничения общности, стрелок на позиции n_3), то тогда, чтобы поразить мишень m_2, нужно застрелить кого-нибудь из стрелков на позициях n_3 и n_4.

в) Поставим стрелков на все позиции с номерами $3k + 1$ и $3k + 2$, (k — натуральное число); при этом стрелки с позиций $3k + 1$ будут стрелять по часовой стрелке, а с позиций $3k + 2$ — против часовой. Тогда каждая пара стрелков на соседних позициях поразит три ближайших к ним мишени.

г) Для начала заметим, что обязательно найдутся два стрелка, которые стоят на соседних позициях. Действительно, возьмём какой-нибудь выстрел (например, из позиции n_3 в n_5). Если на позициях n_2 и n_4 никого нет, то мишень m_2 поразить некому.

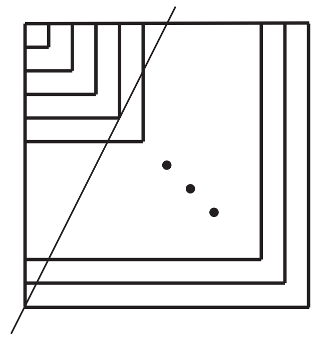
Далее, пусть на позициях n_1 и n_2 есть стрелки, они оба стреляют по мишени m_1 (согласно пункту б). Тогда мишень m_3 обязательно должен поразить стрелок с позиции n_5. Далее, в мишень m_4 обязан стрелять именно стрелок с позиции n_4, так как в противном случае это может сделать только стрелок на позиции n_6, но тогда стрелки на n_5 и n_6 стоят на соседних позициях, а стреляют не в ближайшую к ним мишень, что противоречит доказанному в предыдущем пункте.

Следовательно, есть три последовательных позиции n_1, n_2, n_3, на первых двух из которых стоят стрелки, а третья — пустая, далее снова идут две последовательные позиции n_4, n_5, на которых стоят стрелки. Если повторять предыдущее рассуждение, то получится, что все вершины многоугольника должны разбиться на тройки последовательных с указанным свойством. Таким образом, при N, не делящихся на 3, расставить стрелков не получится.

д) Задача для N, кратных 3, уже решена. Если N даёт остаток 1 при делении на 3, расставим стрелков на позиции с номерами $3k + 2$ и $3k + 3$, соседние стрелки стреляют в ближайшую мишень. Тогда никто не будет стрелять только по мишени m_N. Если N даёт остаток 2 при делении на 3, то поставим стрелков на позиции $3k+1$ и $3k+2$, кроме позиций n_1, n_2, n_{N-1} и n_N, все эти стрелки, аналогично, парами будут стрелять в ближайшую мишень. Мишени m_1 и m_2 поразит стрелок с n_1, мишени m_{N-1} и m_{N-2} поразит стрелок с n_N, и только в мишень m_N никто не стреляет.

8 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

8.1. *Левую и верхнюю стороны квадрата поделили на* 100 *равных частей и из каждой точки деления провели отрезок так, чтобы на рисунке получились контуры меньших квадратов (см. чертёж). Всего проведено* 198 *отрезков. Сколько из этих отрезков пересекает прямая, идущая из левого нижнего угла исходного квадрата в середину его верхней стороны? Ответ обоснуйте. Учитываются только пересечения во внутренних точках квадрата (середина верхней стороны и левый нижний угол пересечениями не считаются).*



к условию задачи 8.1

Решение. Найдём максимальную сторону квадрата, который целиком помещается внутри прямоугольного треугольника с катетами 100 и 50. Квадрат отсечёт два меньших треугольника, в которых один катет вдвое больше другого. Если обозначить сторону квадрата за x, то катеты одного из таких треугольников будут равны x и $50-x$, при этом $2(50-x)=x$. Отсюда находим $x=\dfrac{100}{3}$. Значит, прямая пересечёт горизонтальные отрезки с номерами 34 — 99 (считая сверху) и вертикальные отрезки с номерами 34 — 49 (считая слева). Всего пересечено будет $(99-33+1)+(49-33+1)=82$ отрезка.

Ответ: 82 отрезка.

8.2. *На доске написано число, состоящее из* 2018 *единиц. В четыре каких-то промежутка между единицами Костя вписал по знаку: два знака «+» и два знака «−». Какое наименьшее положительное значение может принимать полученное выражение? Ответ обоснуйте.*

Решение. <u>Способ 1.</u> Все слагаемые заканчиваются цифрой 1, поэтому результат тоже заканчивается цифрой 1. Число 11 можно получить так:

$$11+\underbrace{11\ldots11}_{504\text{ единицы}}+\underbrace{11\ldots11}_{504\text{ единицы}}-\underbrace{11\ldots11}_{504\text{ единицы}}-\underbrace{11\ldots11}_{504\text{ единицы}}.$$

Меньше 11 только число 1. Предположим, что 1 получить можно. Перенесём два числа, перед которыми стоит минус, в правую часть. Тогда получится, что сумма трёх чисел из единиц равна сумме других трёх чисел из единиц. Пусть количество единиц в слагаемых равны соответственно a, b, c, d, e, f, где $a\geqslant b\geqslant c$ и $d\geqslant e\geqslant f=1$. Тогда сумма в левой части равенства записывается в виде $(a-b)$ единиц, $(b-c)$ двоек и c троек, а в правой — $(d-e)$ единиц, $(e-f)$ двоек и f троек. Тогда $c=f$, откуда $b=e$ и $a=d$.

Тогда суммарное количество единиц в слагаемых $2(a+b+c) \neq 2019$. Противоречие. Таким образом, минимальное положительное значение равно 11.

Способ 2. Докажем, что меньше 11 получить нельзя. Можно считать, переставив слагаемые, что полученное на доске выражение — знакопеременная сумма. Каждое слагаемое в сумме умножим на 9 и добавим к нему же 1. Теперь достаточно доказать, что так изменённая знакопеременная сумма не меньше 100, то есть хотя бы трёхзначная. Пусть это не так, тогда она двузначная. Отметим, что если изначально какое-либо слагаемое состояло из k единиц, то теперь оно равно 10^k. Таким образом, сейчас в выражении чётное число нолей. Вычеркнем из суммы одинаковые числа разных знаков, по-прежнему останется знакопеременная сумма с чётным числом нулей, но если сумма выражения действительно двузначная и положительная, то самое большое (по модулю) из оставшихся слагаемое не больше ста, и также положительно. Единиц в сумме быть не может ($k=0$), значит знакопеременная сумма может содержать лишь 10 и 100. Десятки, если есть, одного знака, и их две из-за чётного числа нулей. Перебирая варианты знакопеременной суммы (или $100-10+100-10+100$, или 100, или $10-100+10$), видим, что двузначного положительного числа не получается. Тогда и получить меньше 11 в исходном выражении нельзя. Число 11 получить можно разными способами. Например,

$$1-1+\underbrace{11\ldots1}_{1007\text{ цифр}}-\underbrace{11\ldots1}_{1007\text{ цифр}}+11=11.$$

Ответ: 11.

8.3. *Андрей загадал некоторое натуральное число N. За один ход Борис называет какие-то четыре различные натуральные числа от 1 до 9 включительно, после чего Андрей наугад выбирает одно из них и складывает его с числом N. Полученную сумму он сообщает Борису. После трёх таких ходов и трёх ответов Андрея Борис должен правильно назвать задуманное число, причём на это у него всего одна попытка. Может ли Борис называть такие числа, чтобы наверняка справиться с задачей? Ответ обоснуйте.*

Решение. Например, Боря может назвать следующие четверки чисел: 1) 1, 2, 8, 9; 2) 3, 4, 6, 7; 3) 2, 4, 6, 8. Покажем, как по ответам отгадать число N. Все числа 3, 4, 6, 7 лежат между парами 1, 2 и 8, 9, поэтому, сравнив вторую сумму с первой, можно определить, с числами из какой пары Андрей складывал в первый раз. Без ограничения общности будем считать, что вторая сумма больше первой, т. е. первый раз Андрей назвал $N+1$ или $N+2$. Далее, разность между первой и второй суммой может принимать значения от 1 до 6, при этом возможны следующие варианты:

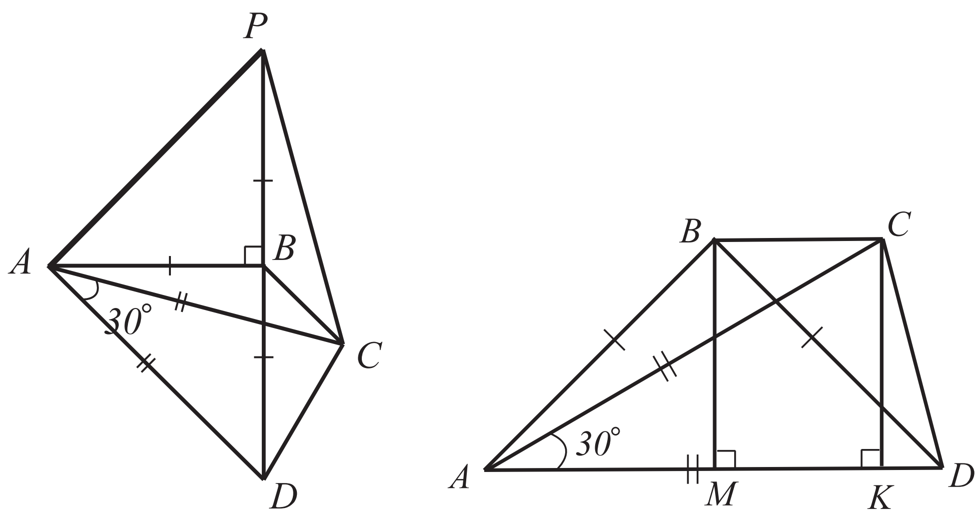
Разность	1	2	3	4	5	6
Первая сумма	$N+2$	$N+1$ или $N+2$	$N+1$	$N+2$	$N+1$ или $N+2$	$N+1$
Вторая сумма	$N+3$	$N+3$ или $N+4$	$N+4$	$N+6$	$N+6$ или $N+7$	$N+7$

Как видно из таблицы, в четырёх случаях из шести Боря может узнать число N уже после второй попытки. В остальных случаях Боре надо узнать, меньшая сумма равна $N+1$ или $N+2$. Эти числа разной чётности, а третья сумма обязательно совпадает с N по чётности. Случай, когда первая сумма была $N+8$ или $N+9$, разбирается аналогично.

Ответ: Может.

8.4. *Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = 90°$, $AB = BD$, $\angle CAD = 30°$, $AC = AD$. Найдите $\angle BCD$. Ответ обоснуйте.*

Решение. Способ 1. На продолжении отрезка BD за точку B поставим такую точку P, что $AB = BP$. Тогда точка B лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AP. В силу равенства треугольников ABD и ABP получаем равенство $AD = AC = AP$, а угол $\angle PAC = \angle CAB + \angle BAP = 60°$. Значит, треугольник PAC — равносторонний. Тогда точка C тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AP, а он является биссектрисой в равностороннем треугольнике. Наконец, $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 30° + 75° = 105°$.



Способ 1 Способ 2

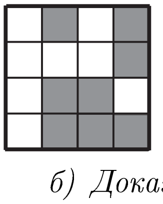
к решению задачи 8.4.

Способ 2. Опустим из вершин B и C перпендикуляры BM и CK на прямую AD. Пусть $AD = AC = a$. Тогда в прямоугольном треугольнике ACK катет CK лежит против угла в $30°$, поэтому $CK = \dfrac{a}{2}$. Отрезок BM — высота в равнобедренном прямоугольном треугольнике ABD; он равен половине гипотенузы, т. е. $BM = \dfrac{a}{2}$. Тогда $BM = CK$, поэтому $AD \parallel BC$, четырёхугольник $ABCD$, следовательно, — трапеция, и поэтому $\angle BCD = 180° - \angle ADC = 180° - \dfrac{180° - \angle CAD}{2} = 105°$.

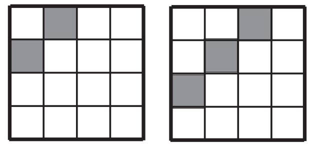
Ответ: $105°$.

8.5. *У Васи есть белый клетчатый квадрат 4×4. Васе разрешены только следующие операции. За один раз Вася может перекрасить в противоположный цвет (белые — в чёрный, чёрные — в белый) все клетки какой-либо диагонали. При этом он может выбирать любую, главную или побочную, диагональ квадрата (угловая клетка тоже является побочной диагональю).*

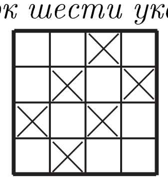
а) Покажите, как при помощи указанных операций Васе получить такую раскраску:



б) Докажите, что количество раскрасок, которые может получить Вася, не изменится, даже если ему запретить выбирать указанные на рисунке ниже диагонали.

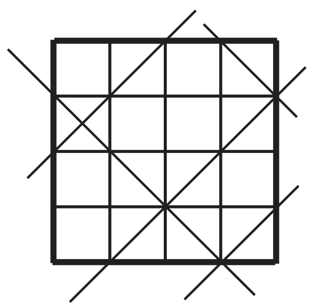


в) Докажите, что Вася может получить любую возможную раскраску не более, чем за 14 операций.

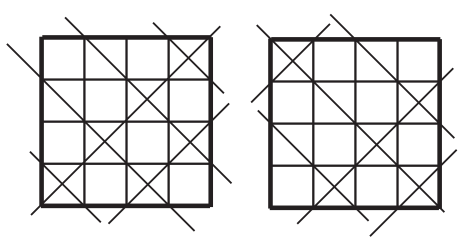
г) Сколько различных раскрасок шести указанных клеток (цвета остальных клеток не важны) может получить Вася?  *Ответ обоснуйте.*

д) Сколько всего различных раскрасок квадрата 4×4 *может получить Вася? Ответ обоснуйте. (Раскраски, получаемые поворотом или симметрией, считаются различными.)Левую и верхнюю стороны квадрата поделили на* 100 *равных частей и из каждой точки деления провели отрезок так, чтобы на рисунке получились контуры меньших квадратов (см. чертеж). Всего проведено* 198 *отрезков. Сколько из этих отрезков пересекает прямая, идущая из левого нижнего угла исходного квадрата в середину его верхней стороны? Ответ обоснуйте. Учитываются только пересечения во внутренних точках квадрата (середина верхней стороны и левый нижний угол пересечениями не считаются).*

Решение. а) Вася должен выбрать указанные 5 диагоналей в любом порядке.



б) Если для получения узора Васе необходимо использовать какую-либо из указанных диагоналей, то вместо этого Вася может сделать шесть ходов, в результате которых будут перекрашены только клетки этой диагонали. Как это сделать, показано на рисунке.



в) Всего Вася может использовать 14 разных диагоналей. При этом для каждой клетки важно лишь количество её перекрашиваний, поэтому порядок перекрашиваний не важен. Следовательно, если какая-то из диагоналей была использована дважды, то можно считать, что эти операции были сделаны подряд, т. е. в результате ни одна клетка не изменилась. Соответственно, эти две операции можно было не делать. Таким образом, из любой последовательности перекрашиваний можно выкинуть все повторения — останется не больше 14 операций.

г) Диагональ из трех отмеченных клеток назовем «длинной», из двух — «короткой». Заметим, что перекрашивание короткой диагонали не меняет чётность количества чёрных клеток на ней, а перекрашивание длинной диагонали меняет чётность количества чёрных клеток на всех коротких. Таким образом, количества чёрных клеток на всех коротких диагоналях одинаковой чётности, а для каждой чётности есть два способа покрасить короткую диагональ. Тогда количество возможных раскрасок этих клеток равно 2 (выбор чётности) умножить на 2^3 (раскраска трёх пар), т. е. 16. Любая из этих 16 раскрасок может быть получена: если на каждой короткой диагонали должно быть чётное количество чёрных клеток — ничего не меняем, если нечётное — перекрашиваем одну длинную диагональ; далее, перекрашивая при необходимости короткие диагонали, получаем нужную раскраску каждой из них.

д) Шесть отмеченных в пункте г) клеток можно раскрасить 16-ю способами, после этого симметричные им относительно средней линии квадрата можно раскрасить 16-ю способами независимо от уже раскрашенных клеток, так как для этого будут использоваться другие диагонали. В последнюю очередь покрасим произвольным образом все угловые клетки. Итого, общее количество раскрасок равно $16 \cdot 16 \cdot 2^4 = 2^{12} = 4096$.

Ответ: г) 16-ю способами; д) $2^{12} = 4096$ раскрасок.

9 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

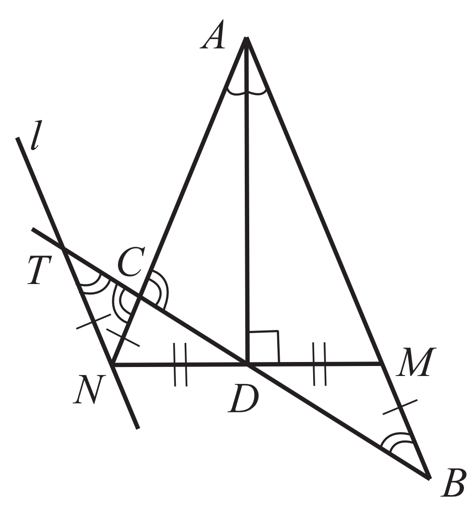
9.1. *Как известно, за рабочий день всякий физик полностью исписывает 5 карандашей, а всякий математик — 7. Кроме того, известно, что в НИИ НИНИ работают только физики и математики. Утром в здании НИИ было 100 карандашей, к тому же каждый физик принес с собой еще по одному, а половина математиков — по семь, и других карандашей не появлялось. В итоге карандашей хватило всем, но в конце дня все карандаши были исписаны. Найдите количество работающих в НИИ людей, если известно, что мужчин среди физиков столько же, сколько женщин, а математиков меньше двадцати. Ответ обоснуйте.*

Решение. Можно считать, что каждый сотрудник НИИ исписал все принесённые с собой карандаши и (если этого не хватило) взял остальные карандаши из 100, имеющихся в НИИ изначально. Тогда каждый физик взял 4 карандаша, а из математиков половина взяла 7 карандашей, а половина не брала вовсе. Физиков в НИИ чётное количество (так как физиков-мужчин и физиков-женщин поровну), пусть их $2x$. Математиков тоже чётно, пусть их $2y$. Имеем уравнение $2x \cdot 4 + y \cdot 7 = 100$. Отсюда число y делится на 4, пусть $y = 4k$, k — целое. Уравнение примет вид $2x + 7k = 25$. отсюда k — нечётно. Кроме того, число математиков равно $8k$ и оно меньше 20, значит, $k \leqslant 2$ и в силу нечётности оно равно 1. Тогда $x = 9$, $y = 4$, и в НИИ НИНИ работают 18 физиков и 8 математиков, всего 26 человек.

Ответ: 26 человек.

9.2. *В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе и пересекающая прямые AB и AC в точках M и N соответственно. Могут ли отрезки MB и CN оказаться равными?*

Решение. Покажем, методом «от противного», что равенство отрезков MB и CN невозможно. Пусть это не так, $MB = CN$. Без ограничения общности будем полагать, что точка M лежит между точками A и B — см. рисунок.



Через точку N проведём прямую l, параллельную прямой AM. Пусть T — точка пересечения прямой l и продолжения стороны BC за точку C. Заметим, что треугольники

DBM и DTN равны. Значит, $TN = BM = CN$. Тогда треугольник TNC равнобедренный, и $\angle NTC = \angle NCT = \angle ACB$. Прямые l и AB параллельны, BC — общая секущая к ним. Отсюда угол ABC равен углу NTC и, соответственно, углу ACB. Тогда треугольник ABC — равнобедренный, что противоречит условию.

Ответ: Не могут.

9.3. *Решите уравнение* $x^4 + y^4 + 2 = (x + y)^2$.

Решение. Проведём равносильные преобразования.

$$x^4 + y^4 + 2 = (x + y)^2$$

$$x^4 + y^4 + 2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$x^4 - x^2 + y^4 - y^2 + 2 - 2xy = 0$$
$$x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 + y^4 - 2y^2 + 1 - 2xy = 0$$
$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + x^2 + y^2 - 2xy = 0$$
$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (x - y)^2 = 0.$$

Сумма неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда все числа равны нулю. Поэтому последнее уравнение равносильно системе $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $x = y$. Имеем два решения $x = y = 1$ или $x = y = -1$.

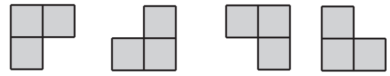
Ответ: $x = y = 1$ или $x = y = -1$.

9.4. *Назовём натуральное число $n \geqslant 4$ красивым, если для любого натурального числа p $(1 < p < n - 1)$ запись числа n в p-ичной системе счисления не содержит двух одинаковых рядом стоящих цифр. Найдите все составные красивые числа. Ответ обоснуйте.*

Решение. Разложим число n на простые множители. Возможны два случая. 1) Некоторое простое число p входит в разложение числа n в степени, большей 1. Тогда число n в p-ичной системе оканчивается на два нуля, следовательно, n не будет красивым. 2) Число n представляет собой произведение различных простых чисел. Пусть d — наименьшее из них. Тогда $n = d \cdot k$, где $k > d$. Рассмотрим систему счисления по модулю $k - 1$. Если $d < k - 1$, то $\overline{d}$ — одна из цифр и, так как $n = d \cdot k = (k - 1) \cdot d + d$, запись числа n в данной системе счисления будет иметь вид $\overline{dd}$. Тогда число n не является красивым. Остаётся случай $k - 1 = d$. Тогда $n = d(d + 1)$ — число чётное, как произведение двух последовательных чисел. d — его наименьший простой делитель, т. е. $d = 2$, а $n = 6$. Проверкой убеждаемся, что число 6 подходит под условие задачи.

Ответ: Такое число одно: 6.

9.5. *У Н. имеется нестандартная шахматная доска размера $n \times n$ клеток и фломастер. Н. развлекается тем, что каждую минуту выбирает на доске какие-нибудь три клетки, расположенные «уголком» (см. рисунок), и ставит в каждую из них по точке. Через какое-то время оказалось, что в процессе этой игры все клетки были отмечены одинаковое число раз.*



к условию задачи 9.5. («уголок»)

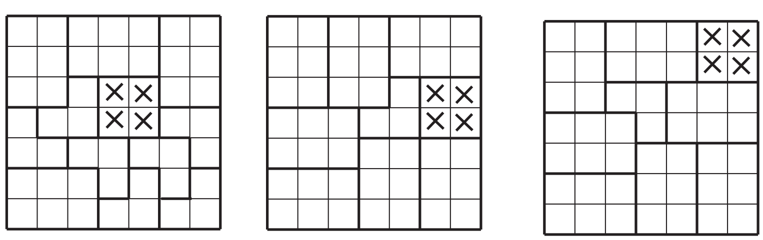
Может ли число n быть равно:
а) 4;
б) 3;
в) 7;
г) 5?
д) Найдите все возможные значения n и докажите, что других нет.

Решение. а) Сначала решим задачу для $n = 2$. Для этого достаточно взять все 4 возможных положения уголка, и тогда каждая клетка будет отмечена 3 раза. Теперь разобьем исходную доску на четыре квадрата размера 2×2 и покроем каждый по алгоритму, указанному выше. Каждая клетка вновь будет отмечена ровно три раза.

б) На доске 3×3 имеется одна центральная клетка, 4 клетки, содержащие угол доски, (назовём их *угловыми*) и оставшиеся 4 клетки (назовём их *боковыми*). Предположим, что возможно выбирать уголки так, что каждая клетка получила ровно k отметок, где $k > 0$. В частности, каждая угловая клетка получила ровно k отметок. Назовем уголок *добрым*, если он покрывает одну из угловых клеток. (Очевидно, покрывать более одной угловой клетки уголки не могут.) Рассмотрим только отметки, полученные при выборе добрых уголков (назовем такие отметки *добрыми*).

Так как в каждой из четырёх угловых клеток по k отметок, то всего добрых уголков $4k$. Каждый из них покрывает одну или две боковых клетки. Если хотя бы один уголок покрывает две клетки, то в боковых клетках не менее $4k+1$ добрых отметок, что невозможно, так как в каждой из них количество любых отметок не превышает k. Значит, каждый добрый уголок покрывает ровно одну боковую клетку. Тогда он в обязательном порядке покрывает и центральную, а значит, в центральной клетке не менее $4k$ добрых отметок, что заведомо больше k. Сделанное предложение привело к противоречию, значит n не может равняться 5.

в) $n = 7$. Достаточно показать, что если мы мысленно «уберём» с доски любую клетку, то оставшиеся 48 клеток мы сможем отметить по одному разу каждое. Действительно, проделав эту операцию для всех полей последовательно, мы отметим все поля по 48 раз.



На приведённых рисунках доска разделена на отдельные уголки, прямоугольники размера 3×2 (каждый из которых легко делится на два уголка) и один квадрат размера 2×2 (помеченный крестиками). Любую из клеток этого квадрата можно «убрать», и мы получим разделение на уголки оставшейся части. Поворачивая рисунки на 90° или 180°, мы сможем покрыть клетками квадрата любую клетку доски, что и завершает решение пункта в).

г) $n = 5$. Предположим, что Н. может действовать так, чтобы каждая клетка получила ровно k отметок, где $k > 0$. Раскрасим клетки доски в 4 цвета следующим образом:

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

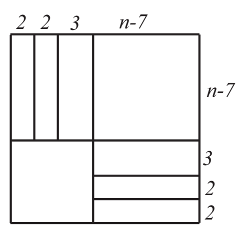
Нетрудно видеть, что всякий уголок будет покрывать клетки трёх различных цветов. Назовем *цветом* уголка тот единственный цвет, клетку которого он не покрывает. Пусть a, b, c, d — количество уголков 1-го, 2-го, 3-го и 4-го цветов соответственно. Каждый уголок 2-го, 3-го или 4-го цвета покрывает ровно одну клетку цвета 1. С другой стороны, всего на доске 9 клеток 1-го цвета, и в каждой отмечено k точек. Значит, $b + c + d = 9k$.

Аналогично составим уравнения для клеток цветов 2 — 4. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} b+c+d = 9k \\ a+c+d = 6k \\ a+b+d = 6k \\ a+b+c = 4k \end{cases}.$$

Решив ее, обнаружим, что a — отрицательно. Класть на доску отрицательные уголки Н. не умеет, а значит, найдено противоречие. Н. не сможет действовать так, чтобы каждая клетка получила поровну отметок.

д) Заметим, что если доску можно разбить на области, для которых решение существует, то и для всей доски решение существует. В пункте а) показано, что при $n = 2$ задача разрешима. Поскольку для любого числа k доска $2k \times 2k$ разбивается на k^2 досок размера 2×2, задача разрешима при всех чётных n. Случай $n = 1$ тривиален: нельзя сделать ни одной отметки, а случаи $n = 3$, $n = 5$ и $n = 7$ разобраны в предыдущих пунктах. Осталось рассмотреть случай нечётного n, большего 7. Покажем, что все такие n нас устраивают. Действительно, разобьём квадрат $n \times n$ при $n > 7$ и n нечётном на квадрат размера 7×7, квадрат размера $(n-7) \times (n-7)$, 4 прямоугольника размера $(n-7) \times 2$ и 2 прямоугольника размера $(n-7) \times 3$ — см. рисунок.



Для каждой из фигур разбиения решение существует: для квадрата 7×7 оно приведено в пункте в); квадрат $(n-7)\times(n-7)$ и прямоугольники $(n-7)\times2$ разбиваются на квадраты 2×2, ввиду чётности числа $n-7$, а прямоугольники $(n-7)\times3$ разбиваются на прямоугольники 2×3, каждый из которых делится на 2 уголка. Значит, решение существует и для всего квадрата $n \times n$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) n — любое натуральное число, кроме 1, 3 и 5.

10 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

10.1. *Буратино нашёл тройку действительных чисел x, y, z, таких, что*

$$x + y + z - 3xy - 3xz - 3yz + 9xyz = \frac{1}{3}.$$

Мальвина утверждает, что знает, чему равно хотя бы одно из этих чисел. Чему оно равно? Ответ обоснуйте.

Решение. Группируя слагаемые, убеждаемся, что

$$9xyz - 3xy - 3xz - 3yz + x + y + z - \frac{1}{3} = 9\Big(x - \frac{1}{3}\Big)\Big(y - \frac{1}{3}\Big)\Big(z - \frac{1}{3}\Big).$$

Тогда хотя бы одна из скобок при подстановке чисел Буратино должна обращаться в ноль. Следовательно, хотя бы одно из его чисел равно $\frac{1}{3}$. Поскольку Буратино мог подобрать все три числа, равными $\frac{1}{3}$, любое другое значение, отличное от $\frac{1}{3}$, не обязано быть среди этих трёх.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

10.2 *В треугольнике проведены все три серединных перпендикуляра. Отношение площадей двух частей треугольника, на которые делит этот треугольник первый перпендикуляр, равно $1 : 3$, а отношение площадей частей двух частей, на которые делит треугольник второй перпендикуляр, не равно $1 : 3$. Найдите как относятся друг к другу площади частей, на которые делит треугольник третий перпендикуляр. Ответ обоснуйте.*

Решение. Докажем лемму. Прямая, проходящая через середину стороны треугольника, делит его площадь в отношении 1:3, тогда и только тогда, когда она содержит среднюю линию треугольника.

Действительно, три средние линии треугольника разбивают его на четыре равных, поэтому каждая средняя линяя делит треугольник в отношении 1:3.

Обратно. Пусть прямая проходит через середину стороны AB треугольника ABC и пересекает ломаную ACB в точке N. При перемещении точки N по ломаной ACB от A к B площадь части треугольника, содержащей точку A, монотонно возрастет от нуля до площади всего треугольника. Значит, ровно один раз она будет равна четверти площади треугольника и ровно один раз — трём четвертям этой площади. И это как раз в случаях, когда прямая пройдёт по средним линиям. Лемма доказана.

Решение задачи: По лемме один серединный перпендикуляр совпал со средней линией. Значит, треугольник прямоугольный, и таких совпавших перпендикуляра два. Второй — не такой, значит, такой третий.

Ответ: 1 к 3.

10.3. *Можно ли расставить в строчку все натуральные числа от* 1 *до* 2017 *так, чтобы для любого* $k = 1, 2, \ldots, 2017$ *сумма первых (слева)* k *чисел* $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

делилась нацело на число a_k. Ответ обоснуйте.

Решение. Покажем, что годится следующая расстановка:

$$1009,\ 1,\ 1010,\ 2,\ 1011,\ 3,\ \ldots\ k+1008,\ k,\ \ldots,\ 2016,\ 1008,\ 2017.$$

Обозначим $a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ в такой расстановке через S_i.

Сначала отметим, что для $i = 2017$ все выполнено, поскольку S_{2017}, как сумма чисел от 1 до 2017 (равная $2017 \cdot 1008$) заведомо делится на 2017.

Теперь для всякого $k, 1 \leqslant k \leqslant 1008$

$$S_{2k} = (1008 + 1 + 1) + (1008 + 2 + 2) + \ldots + (1008 + k + k) = 1008k + k(k+1) = (1009 + k)k$$

делится на $a_{2k} = k$,

$$S_{2k-1} = (1009 + k)k - a_{2k} = (1008 + k)k$$

делится на $a_{2k-1} = 1008 + k$.

Ответ: $1009,\ 1,\ 1010,\ 2,\ 1011,\ 3,\ \ldots\ k+1008,\ k,\ \ldots,\ 2016,\ 1008,\ 2017.$

10.4. *Некоторое непустое подмножество трёхмерного пространства обладает следующим свойством: его пересечение с любой плоскостью является либо пустым множеством, либо точкой, либо окружностью. Докажите, что это множество — точка или сфера.*

Решение. Достаточно доказать, что если исходное множество содержит хотя бы две точки, то это сфера. Пусть оно содержит две различные точки A и B. Рассмотрим некую плоскость α_1, содержащую обе эти точки. Поскольку пересечение с этой плоскостью как минимум двухточечно, это пересечение — окружность; обозначим через AA' её диаметр. Рассмотрим плоскость α_2, содержащую точки A, A' и перпендикулярную α_1. Поскольку пересечение исходного множества и с этой плоскостью как минимум двухточечно, это пересечение — окружность, окружность ω_2; обозначим через O её центр, а через DD' тот её диаметр, что перпендикулярен плоскости α_1. Заметим, что точки D, D' также принадлежат исходному множеству.

Рассмотрим в пространстве произвольную точку X. Зафиксируем плоскость, проходящую через точки X, D, D' (или одну из таких плоскостей), её пересечение с окружностью ω_1 непусто и содержит некоторую точку C. Точка C, как и вся окружность ω_1, содержится в исходном множестве. Тогда и описанная вокруг треугольника CDD' окружность ω_X также содержится в исходном множестве. Треугольники CDD', ADD' равны, следовательно, радиусы описанных вокруг них окружностей равны, и равны OD. Отсюда точка X принадлежит исходному множеству тогда и только тогда, когда она попадает в окружность ω_X, то есть когда точка X удалена от точки O на расстояние OD. Итак, X принадлежит исходному множеству тогда и только тогда, когда $XD = OD$. Поскольку точки O и D не зависели от выбора точки X, исходное множество — сфера.

10.5. *Верно ли, что при любых натуральных числах m, n*

а) имеет место $|m^2 - 2n^2| \geqslant 1$;

б) из $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$ следует $\sqrt{2} - \dfrac{m}{n} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}n^2}$;

в) из $\dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$ *следует* $\dfrac{m}{n} - \sqrt{2} \geqslant \dfrac{1}{3n^2}$*;*

г) имеет место $\left|\sqrt{2} - \dfrac{m}{n}\right| \geqslant \dfrac{1}{2,9n^2}$*;*

д) из $\dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$ *следует* $\dfrac{m}{n} - \sqrt{2} \geqslant \dfrac{6-4\sqrt{2}}{n^2}$*?*

Решение. Сначала заметим, что при любых натуральных числах m, n, поскольку число m^2-2n^2 также целое, имеет место $|m^2-2n^2| \geqslant 1$, а значит и $\left|\dfrac{m^2}{n^2}-2\right| \geqslant \dfrac{1}{n^2}$. Пункт а) доказан.

Отсюда имеем

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| = \frac{\left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right|}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)n^2}.$$

Теперь в случае $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$ получаем пункт б):

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geqslant \frac{1}{\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)n^2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}.$$

Легко проверить, что $6 - 4\sqrt{2} > \dfrac{1}{3}$, поэтому пункт в) является следствием пункта д). Докажем, что пункт д) верен.

Пусть $\dfrac{m}{n} \geqslant \sqrt{2}$. Возможны два случая.

Первый случай. $\dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$. Тогда

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geqslant \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)n^2} = \frac{6-4\sqrt{2}}{n^2}.$$

Второй случай. $\dfrac{m}{n} > \dfrac{3}{2}$.

Отметим, что если пункт д) доказан для некоторого $\dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$, то он выполнен и для всех $\dfrac{m'}{n} > \dfrac{m}{n}$ в силу тривиального $\left|\dfrac{m'}{n} - \sqrt{2}\right| > \dfrac{m}{n} - \sqrt{2}$. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $\dfrac{m}{n} > \dfrac{3}{2}$ и $\sqrt{2} > \dfrac{m-1}{n}$, то есть $\dfrac{2m}{2n} > \dfrac{3n}{2n} > \sqrt{2} > \dfrac{2m-2}{2n}$. Но теперь из равенства $\dfrac{m}{n} + \dfrac{m-1}{n} = \dfrac{2m-1}{n} = 3 > 2\sqrt{2}$ следует, что

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} > \sqrt{2} - \frac{m-1}{n} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}n^2} > \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)n^2}.$$

Покажем, что пункт г) неверен, т. е. оценка $\left|\sqrt{2} - \dfrac{m}{n}\right| \geqslant \dfrac{1}{2,9n^2}$ не имеет места для $\dfrac{m}{n} = 3/2$.

Это можно сделать, проследив за выкладками выше и убедившись, что $\dfrac{m}{n} = 3/2$ дает

$$\left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right| = \frac{1}{n^2}, \ \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{\left(\dfrac{m}{n} + \sqrt{2}\right)n^2},$$

откуда, в силу $1,5 + \sqrt{2} > 1,9$,

$$\left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)n^2} < \frac{1}{2,9n^2}.$$

Другой способ — прямая подстановка. Из

$$\frac{1}{6 + 4\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right| \geqslant \frac{1}{2,9 \cdot 4} = \frac{1}{11,6}$$

следовало бы $6 + 4\sqrt{2} \leqslant 11,6$, $5\sqrt{2} \leqslant 7$, $50 \leqslant 49$, что неверно.

Ответ: а), б), в), д) верно; г) неверно.

11 КЛАСС (решения)
ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018 г

11.1. *Положительные числа a, b, c, d таковы, что ровно одно из чисел $a-c$, $b+d$, $ab-bc-cd$, ad иррационально. Какое? Ответ обоснуйте.*

Решение. Заметим, что $(a-c)\cdot(b+d) = (ab-bc-cd)+ad$, т. е. произведение двух чисел набора равно сумме двух других. Значит, если оба числа $a-c$ и $b+d$ рациональные, то числа $(ab-bc-cd)$ и ad либо оба рациональны, либо оба иррациональны. Тогда в указанном наборе иррациональных чисел либо ровно два, либо нет ни одного. Противоречие. Итак, иррациональное число — одно из чисел $a-c$ или $b+d$. Так как числа b и d по условию положительные, число $b+d$ отлично от нуля, и, если оно рационально, то число $a-c = \dfrac{(ab-bc-cd)+ad}{b+d}$ также рационально. Снова противоречие. Остаётся случай: иррациональное число $b+d$, а число $a-c=0$. При этом оказывается, что и $(ab-bc-cd)+ad=0$. Этот случай возможен, например, при $a=b=c=d=\sqrt{2}$.

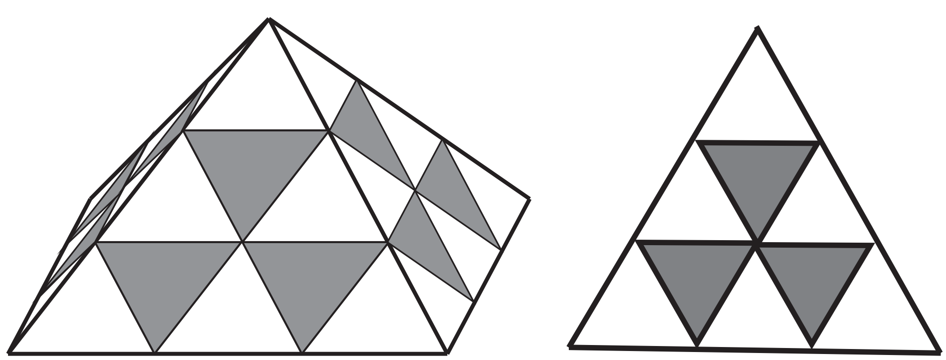
Ответ: Иррациональное число — это число $b+d$.

11.2. *Определённая на всей числовой прямой функция $f(x)$ для всех чисел x удовлетворяет равенству $f(f(x)) = x^2-x+1$. Чему равно $f(1)$? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. По условию $f(f(1)) = 1^2-1+1 = 1$. Тогда $f(f(f(1))) = f(1)$. С другой стороны, $f(f(f(1))) = f(1)^2 - f(1)+1$. Значит, $f(1) = f^2(1)-f(1)+1$. Отсюда $(f(1)-1)^2=0$ и $f(1)=1$. Такие функции f существуют, например, $f(x)\equiv 1$.

Ответ: 1.

11.3. *Дана правильная четырёхугольная пирамида, боковые грани которой — правильные треугольники. В пирамиде параллельно основанию вырезаны 6 сквозных треугольных отверстий так, что на каждой боковой грани возникли три дыры с основаниями из вырезанных правильных треугольников (см. рисунок, дыры окрашены в серый цвет). Найдите объём «дырявой» пирамиды, если длина каждого из рёбер исходной пирамиды равна 1 м.*

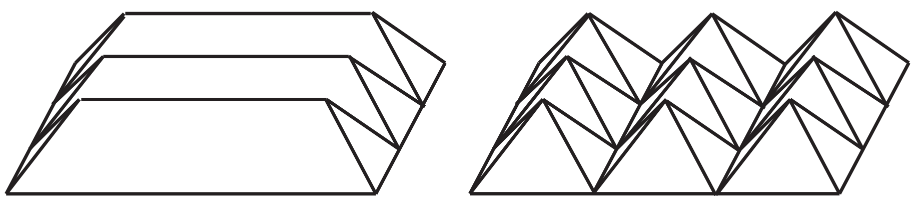


к условию задачи 11.3

Решение. Разрежем пирамиду на три «слоя» плоскостями, параллельными основанию и делящими высоту пирамиды на три равные части. Верхний слой будет состоять из одной пирамиды, подобной исходной с коэффициентом $1/3$, будем называть её *малой*. Средний слой представляет собой усечённую пирамиду, в которой прорезали две «треугольные дыры»:

к решению задачи 11.3. Средний слой.

Итак, средний слой состоит из четырёх малых пирамид. Аналогично, нижний слой — это тоже усечённая пирамида, в которой вырезали четыре «треугольные дыры»:



к решению задачи 11.3. Нижний слой.

Нижний слой состоит из девяти малых пирамид. Таким образом, вся «дырявая» пирамида состоит из 14 малых. Так как объём малой пирамиды составляет $1/27$ объёма исходной (объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия), то объём всей «дырявой» пирамиды равен $\dfrac{14}{27}$ объёма исходной. Задача стала элементарной: площадь основания исходной пирамиды равна $1 \cdot 1 = 1$, её высота равна половине диагонали основания, т. е. равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Объём исходной пирамиды тогда равен $\dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$, а искомый объём равен $\dfrac{7\sqrt{2}}{81}$.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{2}}{81}$.

11.4. *Все натуральные числа от* 1 *до* 2018 *включительно разбили на две группы по* 1009 *штук в каждой. Числа первой группы расположили в возрастающем порядке:* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{1009}$, *а числа второй — в убывающем:* $y_1 > y_2 > \ldots > y_{1009}$. *Докажите, что число*

$$S = \sum_{i=1}^{1009} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_{1009} - y_{1009}|$$

не зависит от того, каким образом были разбиты числа на группы, и найдите это число S.

Решение. Покажем, что независимо от способа разбиения в каждой паре $(x_i,\, y_i)$ одно из чисел больше 1009, а второе — не больше 1009. В этом случае задача легко решится: после раскрытия всех модулей число S окажется равным

$$1010 + 1011 + \ldots + 2018 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 1009) = S_{2018} - 2S_{1009},$$

где $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ — сумма всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Значит,

$$S = \frac{2018 \cdot 2019}{2} - 1009 \cdot 1010 = 1009 \cdot (2019 - 1010) = 1009^2 = 1018081.$$

Рассмотрим произвольный номер i ($1 \leqslant i \leqslant 1009$). Без ограничения общности, пусть $x_i > y_i$. Тогда, с одной стороны, $x_i > x_{i-1} > x_{i-2} > \ldots > x_1$, а с другой $x_i > y_i > x_{i+1} > y_{i+2} > \ldots > y_{1009}$. Значит, среди всех 2018 чисел есть по крайней мере 1009, которые меньше числа x_i, поэтому $x_i > 1009$. Аналогично, $y_i < y_{i-1} < y_{i-2} < \ldots < y_1$, и $y_i < x_i < x_{i+1} < x_{i+2} < \ldots < x_{1009}$; поэтому имеется по крайней мере 1009 чисел, которые больше y_i, откуда $y_i \leqslant 1009$. Утверждение доказано; задача решена.

Ответ: $S = 1009^2 = 1018081$.

11.5. *В некоторой клетке бесконечной шахматной доски расположен (m, n)-конь. (m, n)-конь — это фигура сказочных шахмат, которая за один ход перемещается в клетку, отстоящую от исходной на m клеток в одном направлении (горизонтальном или вертикальном) и на n клеток в направлении, перпендикулярном ему (например, обычный шахматный конь — это $(1, 2)$-конь, или, что то же самое, $(2, 1)$-конь). Требуется за несколько ходов переместить коня на соседнюю по горизонтали клетку.*

а) Решите задачу при $m = 4$, $n = 3$;

б) Разрешима ли задача при $n = 12$, $m = 15$?

в) Разрешима ли задача при $n = 5$, $m = 3$?

г) Укажите все пары натуральных чисел m, n, при которых задача разрешима;

д) За какое наименьшее число ходов (в зависимости от натурального n) можно решить задачу, если $m = 1$?

Решение.

а) Например, перемещаем коня на 4 клетки вправо и на 3 вверх три раза (первыми тремя ходами). Теперь конь будет отстоять от начального местоположения на 12 горизонталей и на 9 вертикалей. Теперь три раза делаем ход на 4 клетки вниз и на 3 клетки влево — по отношению к начальному положению конь окажется правее на 3 горизонтали и ниже на 3 вертикали. Последним ходом переместим коня на 4 клетки вверх и на 3 влево — конь окажется клеткой выше своего начального положения.

б) Задача неразрешима, поскольку в проекции и на горизонталь и на вертикаль конь каждый раз смещается на число клеток, кратное 3. А надо, чтобы он по одному из этих направлений сместился на 1.

в) Задача неразрешима. Рассмотрим шахматную раскраску доски. При переходе на соседнее по горизонтали или вертикали поле его цвет меняется. При движении на m клеток в одном направлении и n в перпендикулярном мы поменяем цвет клетки $m + n$ раз. Так как числа 5 и 3 нечётны — цвет поля на котором стоит $(3, 5)$ конь и цвет любого поля, на которое он может пойти, один и тот же. Значит, наш конь ходит только по полям одного цвета, и на соседнее по горизонтали и по вертикали поле встать никогда не сможет.

г) По соображениям, аналогичным приведённым в решениях пунктов б) и в) получаем, что для того, чтобы задача была разрешима, необходимо, чтобы, во-первых, числа m и n были взаимно простыми, во-вторых, имели разную чётность. Покажем, что эти условия являются и достаточными.

Итак, пусть числа m и n взаимно просты. Тогда существуют целые числа x и y такие, что $mx - ny = 1$. Сделаем пару ходов: сперва на m клеток вправо и на n — вверх, затем на

m — вправо и ни n — вниз. Конь сместиться на $2m$ клеток вправо. Аналогично парой ходов можно сместить коня на $2n$ клеток влево. Сделаем x пар ходов первого типа и y пар ходов второго. Конь, оставшись на той же горизонтали, сдвинется вправо на $x \cdot 2m - y \cdot 2n = 2$ поля. Очевидно, что подобным алгоритмом, можно переместить коня на 2 поля в любом из четырёх направлений: вверх, вниз, влево или вправо.

Без ограничения общности, будем считать, что $m = 2m_1$ — чётно, а $n = 2n_1 - 1$ — нечётно. Приведённым выше способом сначала сдвинем коня на $2m_1$ клетки влево, затем на $2n_1$ клетки вниз, а потом за один ход переместим его на m клеток вправо и на n вверх. Попадём в клетку, соседнюю сверху от изначальной. Задача решена.

д) Задача неразрешима при нечётном n — см. предыдущий пункт. При $n = 2t$ (t — натуральное) задачу можно решить за $2t + 1$ ход: первый ход делаем вида $(1, 2t)$, а потом t раз делаем пару ходов $(t, -1)$, $(-t, -1)$. Каждой такой парой ходов мы опускаем коня на 2 клетки вниз, поэтому после выполнения предложенного алгоритма конь будет в соседней справа клетке. Покажем, что меньшим числом ходов обойтись не удастся.

Без ограничения общности, будем переставлять коня в соседнюю по горизонтали клетку. Пусть есть последовательность ходов, это осуществляющая. Назовём ход *горизонтальным*, если он смещает коня по горизонтали на n клеток (влево или вправо), а по вертикали тогда — ровно на 1 клетку. Остальные ходы назовём *вертикальными*. Так как конечное положение коня не зависит от того, в какой последовательности делаются ходы, мы можем считать, что сначала сделаны все вертикальные ходы, потом — все горизонтальные. В силу чётности n, вертикальных ходов должно быть нечётное число, поэтому после того, как все вертикальные ходы будут сделаны, конь окажется отстоящим по вертикали от исходного положения не меньше, чем на n горизонталей. Каждый горизонтальный ход приближает коня к исходному положению не больше, чем на 1, поэтому имеется ещё по крайней мере n горизонтальных ходов.

Ответ: б), в) нельзя; г) $(m, n) = 1$ и ровно одно из этих чисел чётно; д) За $\dfrac{n}{2} + 1$ ход при чётном n, а при нечётном задача невыполнима.