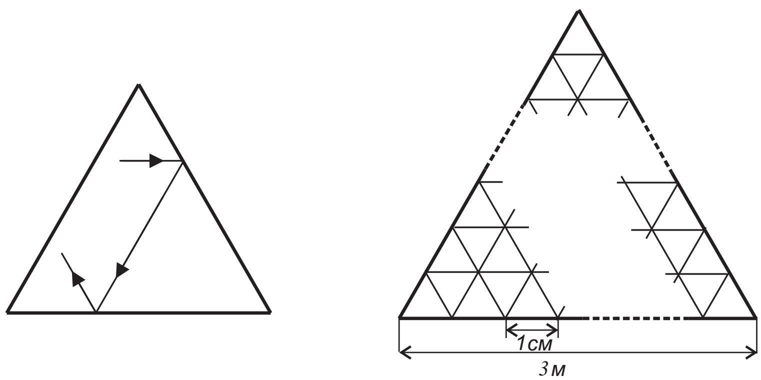
XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018

5 класс

5.1. Один мальчик всегда врёт по воскресеньям и говорит только правду по вторникам и средам. (В остальные дни недели он может сказать как правду, так и ложь.) Шесть дней подряд этого мальчика просили назвать своё имя. Ответы были такими: Максим, Игорь, Максим, Игорь, Олег, Игорь. Как его зовут на самом деле? Ответ обоснуйте.

5.2. Бильярдный стол имеет форму равностороннего треугольника без луз. Сторона треугольника равна 3 м. Параллельно одной его из сторон запускают бильярдный шар, который, отразившись от борта стола, всегда будет двигаться параллельно другой его стороне (см. рисунок). При движении шар оставляет за собой след: тонкую хорошо различимую линию. Какое наименьшее количество раз надо запустить шар, чтобы поверхность стола полностью покрылось треугольной сеткой со стороной треугольника 1 см? Ответ обоснуйте. Предполагается, что шар после удара движется неограниченно долго без снижения скорости.



К условию задачи 5.2

5.3. Вера, Надя и Люба собирали грибы. Вера набрала вдвое меньше грибов, чем Надя и Люба вместе взятые. Надя набрала впятеро меньше грибов, чем Вера и Люба вместе взятые. У кого грибов больше: у Любы или у Нади с Верой, вместе взятых? Ответ обоснуйте.

5.4. Вовочка стал владельцем компании и теперь работает над различными проектами. Новые проекты он начинает каждые два дня, а работа над каждым новым проектом занимает ровно на 1 день больше, чем над предыдущим. Первый свой проект Вовочка начал 1 февраля 2018 г. и закончил его в течение этого дня. Найдите ближайшую дату, когда Вовочка будет работать над десятью проектами одновременно.

5.5. Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 26 клеток и шириной 1 клетка. В каждую клеточку полоски записали натуральное число так, что числа, записанные в соседних клетках, отличаются ровно на 1. Оказалось, что каждое из записанных чисел встречается во всей полоске одно и то же количество раз. Какое именно количество? Приведите все варианты ответов и докажите, что других нет.

XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018

6 класс

6.1. Найдите все трёхзначные натуральные числа, удовлетворяющие одновременно двум условиям:

1) цифра этого числа в разряде десятков в два раза меньше цифры в разряде единиц;

2) если это число представить в виде произведения простых множителей, то все множители будут одной чётности.

(Напомним, что натуральное число — простое, если оно больше 1 и делится нацело только на себя и на 1.)

Ответ обоснуйте.

6.2. Доцент и профессор вместе вышли с заседания кафедры и пошли прогуляться (каждый со своей постоянной скоростью) в сторону деканата. Доцент добрался до деканата за минуту и сразу же пошёл обратно на кафедру. Спустя еще 10 секунд он встретил профессора, но прошёл мимо, не останавливаясь. А ещё спустя некоторое время t доцент, так и не дойдя до кафедры, развернулся и вновь пошёл в деканат, которого достиг одновременно с профессором. Сколько секунд составило время t? Ответ обоснуйте.

6.3. Существует ли четырёхугольник, который можно разрезать тремя прямыми на 10 многоугольников? Ответ обоснуйте.

6.4. На доске выписаны 300 различных натуральных чисел. Все они не больше 900, ровно 200 из них не превосходят 600 и ровно 100 — не превосходят 300. Кроме того, известно, что разность никаких двух из них не равна 300 и не равна 600. Найдите сумму всех этих 300 чисел. Ответ обоснуйте.

6.5. Гарри Поттер выкладывает в ряд 15 берёзовых и 15 дубовых палочек. Изначально он кладет две палочки — берёзовую и дубовую. После этого он кладет по одной палочке между двумя, которые уже лежат. Если Гарри кладет палочку между двумя палочками из другого вида дерева (дубовую между двумя берёзовыми или наоборот), то палочка становится волшебной; во всех других случаях она волшебных свойств не приобретает. В итоге оказалось, что березовые и дубовые палочки чередуются. Сколько из 30 палочек стали волшебными? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018

7 класс

7.1. Вдоль прямолинейной дороги длиной 39 км, ведущей к магазину, расположены несколько домов. Администрация магазина хочет поставить у дороги автобусную остановку и пустить автобус, курсирующий между этой остановкой и магазином (других остановок на маршруте не будет). Скорость автобуса 60 км/ч, пешеходов — 5 км/ч. Можно ли поставить остановку в таком месте дороги, чтобы любой житель домов мог добраться до магазина, проведя в пути не более 3 часов? Ответ обоснуйте. Время ожидания автобуса на остановке считается равным нулю.

7.2. На длинной полоске бумаги написано 18-значное число:

$$111111222222333333.$$

На какое наибольшее число частей можно разрезать эту полоску бумаги (разрезы делаются только между соседними цифрами) так, чтобы суммы цифр на всех частях были попарно различны? Ответ обоснуйте.

7.3. В вершинах куба сидят муравьи, всего 15 муравьёв. Раз в минуту ровно два муравья одинаково (по параллельным рёбрам или по одному тому же ребру, причём в одном направлении) переползают в соседние вершины. Верно ли, что при любом изначальном расположении муравьёв все они могут собраться в одной вершине куба? Муравьи считаются точками. Ответ обоснуйте.

7.4. Костя последовательно выписал 30 натуральных чисел, причём каждое следующее выписанное число (начиная со второго) ровно на 137 больше предыдущего. Докажите, что точными квадратами (т. е. квадратами целых чисел) могут являться не более половины из выписанных чисел.

7.5. Стрелковый полигон имеет форму выпуклого N-угольника, $N \geqslant 5$. Назовем короткой диагональю многоугольника диагональ, отсекающую от него треугольник. Мишени на полигоне расположены во всех точках пересечения коротких диагоналей и только в них. В вершинах полигона оборудованы позиции для стрелков. В каждой вершине может стоять не более одного стрелка. Каждый стрелок может сделать по одному выстрелу, причём только вдоль короткой диагонали и при условии, что на другом конце этой диагонали нет другого стрелка. При этом выстрел поражает обе мишени на этой диагонали. Для каждого N необходимо выяснить, можно ли разместить стрелков так, чтобы все мишени были поражены одним залпом.

а) Найдите хотя бы одно значение N, при котором удастся расставить стрелков указанным образом. **(1 балл)**

б) Докажите, что для того, чтобы все мишени были поражены, два стрелка, стоящие в соседних вершинах, обязаны стрелять по одной и той же, ближайшей к ним, мишени. **(3 балла)**

в) Решите задачу при всех N, делящихся на 3. **(3 балла)**

г) Решите задачу при всех N, не делящихся на 3. **(4 балла)**

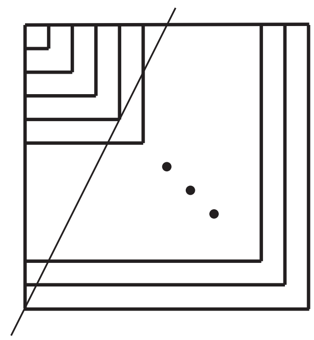
д) Докажите, что при любом N можно расставить стрелков так, чтобы они поразили все мишени кроме, может быть, одной. **(3 балла)**

XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018

8 класс

8.1. Левую и верхнюю стороны квадрата поделили на 1010 равных частей и из каждой точки деления провели отрезок так, чтобы на рисунке получились контуры меньших квадратов (см. чертёж). Всего проведено 2018 отрезков. Сколько из этих отрезков пересекает прямая, идущая из левого нижнего угла исходного квадрата в середину его верхней стороны? Ответ обоснуйте. Учитываются только пересечения во внутренних точках отрезков (например, середина верхней стороны пересечением не считается).



К условию задачи 8.1

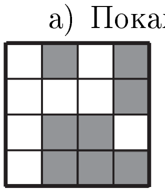
8.2. На доске написано число, состоящее из 2018 единиц. В четыре каких-то промежутка между единицами Костя вписал по знаку: два знака «+» и два знака «−». Какое наименьшее положительное значение может принимать полученное выражение? Ответ обоснуйте.

8.3. Андрей загадал некоторое натуральное число N. За один ход Борис называет четыре различных натуральных числа от 1 до 9 включительно, после чего Андрей наугад выбирает одно из них и складывает его с числом N. Полученную сумму он сообщает Борису. После трёх таких ходов и трёх ответов Андрея Борис должен правильно назвать задуманное число, причём на это у него всего одна попытка. Может ли Борис называть такие числа, чтобы наверняка справиться с задачей? Ответ обоснуйте.

8.4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = 90°$, $AB = BD$, $\angle CAD = 30°$, $AC = AD$. Найдите $\angle BCD$. Ответ обоснуйте.

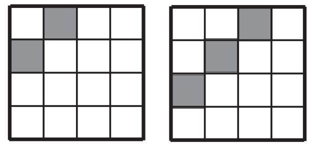
8.5. У Васи есть белый клетчатый квадрат 4×4. Васе разрешены только следующие операции: за один раз Вася может перекрасить в противоположный цвет (белые — в чёрный, чёрные — в белый) все клетки какой-либо диагонали. При этом он может выбирать любую, главную или побочную, диагональ квадрата (угловая клетка тоже является побочной диагональю).

а) Покажите, как при помощи указанных операций Васе получить такую раскраску:

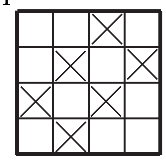


(1 балл)

б) Докажите, что количество раскрасок, которые может получить Вася, не изменится, даже если ему запретить выбирать указанные на рисунке ниже диагонали. **(2 балла)**



в) Докажите, что Вася может получить любую возможную раскраску не более, чем за 14 операций. **(3 балла)**

г) Сколько различных раскрасок шести указанных клеток (цвета остальных клеток не важны) может получить Вася?  Ответ обоснуйте. **(5 баллов)**

д) Сколько всего различных раскрасок квадрата 4×4 может получить Вася? Ответ обоснуйте. **(3 балла)**

Раскраски, получаемые поворотом или симметрией, считаются различными.

XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018

9 класс

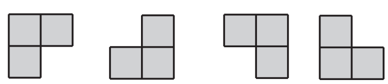
9.1. Известно, что в НИИ НИНИ работают только физики и математики. За рабочий день каждый физик полностью исписывает 5 карандашей, а каждый математик — 7. Утром в здании НИИ было 100 карандашей, к тому же каждый физик принес с собой еще по одному, а половина математиков — по семь, и других карандашей не появлялось. В итоге карандашей хватило всем, но в конце дня все карандаши были исписаны. Найдите количество работающих в НИИ людей, если известно, что мужчин среди физиков столько же, сколько женщин, а математиков меньше двадцати. Ответ обоснуйте.

9.2. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе и пересекающая прямые AB и AC в точках M и N соответственно. Могут ли отрезки MB и CN оказаться равными?

9.3. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = (x + y)^2$.

9.4. Назовём натуральное число $n \geqslant 4$ *красивым*, если для любого натурального числа p $(1 < p < n - 1)$ запись числа n в p-ичной системе счисления не содержит двух одинаковых рядом стоящих цифр. Найдите все составные красивые числа. Ответ обоснуйте.

9.5. У Мурзилки имеется нестандартная шахматная доска размера $n \times n$ клеток и фломастер. Мурзилка развлекается тем, что каждую минуту выбирает на доске какие-нибудь три клетки, расположенные «уголком» (см. рисунок), и ставит в каждую из них по точке. Через какое-то время оказалось, что в процессе этой игры все клетки были отмечены одинаковое число раз.



К условию задачи 9.5 («уголок»)

Может ли число n быть равно:

а) 4; **(1 балл)**

б) 3; **(2 балла)**

в) 7; **(3 балла)**

г) 5? **(6 баллов)**

д) Найдите все возможные значения n и докажите, что других нет. **(2 балла)**

XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018
10 класс

10.1. Буратино нашёл тройку действительных чисел x, y, z, таких, что

$$x + y + z - 3xy - 3xz - 3yz + 9xyz = \frac{1}{3}.$$

Мальвина справедливо утверждает, что, даже не зная эти числа, можно найти значение хотя бы одного из них. Чему оно равно? Ответ обоснуйте.

10.2. В треугольнике проведены все три срединных перпендикуляра. Отношение площадей двух частей треугольника, на которые делит этот треугольник первый перпендикуляр, равно $1 : 3$, а отношение площадей частей двух частей, на которые делит треугольник второй перпендикуляр, не равно $1 : 3$. Найдите, как относятся друг к другу площади частей, на которые делит треугольник третий перпендикуляр. Ответ обоснуйте.
Во всех случаях рассматривается отношение меньшей площади к большей.

10.3. Можно ли расставить в строчку все натуральные числа от 1 до 1717 так, чтобы для любого $k = 1, 2, \ldots, 1717$ сумма первых (слева) k чисел $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ делилась нацело на число a_k? Ответ обоснуйте.

10.4. Некоторое непустое подмножество трёхмерного пространства обладает следующим свойством: его пересечение с любой плоскостью является либо пустым множеством, либо точкой, либо окружностью. Докажите, что это множество — точка или сфера.

10.5. Верно ли, что при любых натуральных числах m, n

а) имеет место неравенство $|m^2 - 2n^2| \geqslant 1$; **(1 балл)**

б) из условия $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$ следует, что $\sqrt{2} - \dfrac{m}{n} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}n^2}$; **(4 балла)**

в) из условия $\dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$ следует, что $\dfrac{m}{n} - \sqrt{2} \geqslant \dfrac{1}{3n^2}$; **(3 балла)**

г) имеет место неравенство $\left|\sqrt{2} - \dfrac{m}{n}\right| \geqslant \dfrac{1}{2,9n^2}$; **(3 балла)**

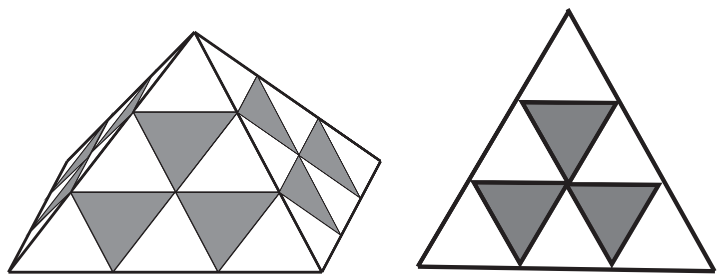
д) из условия $\dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$ следует, что $\dfrac{m}{n} - \sqrt{2} \geqslant \dfrac{6 - 4\sqrt{2}}{n^2}$? **(3 балла)**

XVII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2018
11 класс

11.1. Положительные числа a, b, c, d таковы, что ровно одно из чисел $a - c$, $b + d$, $ab - bc - cd$, ad иррационально. Какое? Ответ обоснуйте.

11.2. Определённая на всей числовой прямой функция $f(x)$ для всех чисел x удовлетворяет равенству $f(f(x)) = x^2 - x + 1$. Чему равно $f(1)$? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

11.3. У барона Мюнгхаузена была правильная четырёхугольная пирамида, боковые грани которой — правильные треугольники со стороной 1 метр. Барон сделал шесть выстрелов из пушки треугольными ядрами, каждый раз стреляя параллельно какому-либо ребру основания. Ядра пролетели сквозь пирамиду по прямой и не вращаясь. В результате в пирамиде получилось шесть сквозных отверстий, а на каждой боковой грани возникли три дыры в форме правильных треугольников (см. рисунок, дыры окрашены в серый цвет). Найдите объём «дырявой» пирамиды.



К условию задачи 11.3

11.4. Все натуральные числа от 1 до 2018 включительно разбили на две группы по 1009 штук в каждой. Числа первой группы расположили в возрастающем порядке: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{1009}$, а числа второй — в убывающем: $y_1 > y_2 > \ldots > y_{1009}$. Докажите, что число

$$S = \sum_{i=1}^{1009} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_{1009} - y_{1009}|$$

не зависит от того, каким образом были разбиты числа на группы, и найдите это число S.

11.5. В некоторой клетке бесконечной шахматной доски расположена сказочная шахматная фигура (m, n)-конь. Эта фигура за один ход перемещается в клетку, отстоящую от исходной на m клеток в одном направлении (горизонтальном или вертикальном) и на n клеток в направлении, перпендикулярном ему (например, обычный шахматный конь — это (1, 2)-конь, или, что то же самое, (2, 1)-конь). Требуется за несколько ходов переместить коня на соседнюю по горизонтали клетку.

а) Решите задачу при $m = 4$, $n = 3$; **(1 балл)**

б) Разрешима ли задача при $n = 12$, $m = 15$? **(1 балл)**

в) Разрешима ли задача при $n = 5$, $m = 3$? **(3 балла)**

г) Укажите все пары натуральных чисел m, n, при которых задача разрешима; **(4 балла)**

д) За какое наименьшее число ходов (в зависимости от натурального n) можно решить задачу, если $m = 1$? **(5 баллов)**