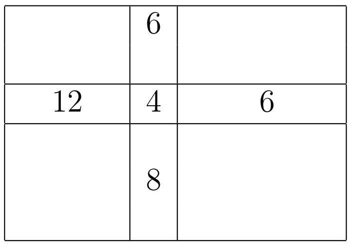
XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

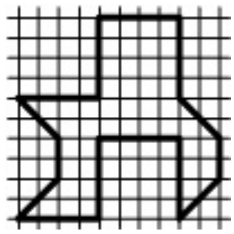
5 класс

5.1 На уроке английского языка группе из 10 пятиклассников дали тест. На каждый из вопросов теста правильно ответили ровно 7 пятиклассников. Известно, что девять учеников ответили правильно каждый на 4 вопроса. Сколько правильных ответов дал десятый ученик? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

5.2 Прямоугольник разделён на 9 меньших прямоугольников. Периметры пяти из них известны — см. рисунок; они записаны внутри «своих» прямоугольников. Чему равен периметр исходного прямоугольника? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 5.2



К условию задачи 5.4

5.3 Назовем число *суммируемым*, если оно представимо в виде суммы восьми различных натуральных чисел, причём единственным (с точностью до перестановки слагаемых) образом. Найдите все суммируемые числа и докажите, что других таких чисел нет.

5.4 Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на две равные части (одинаковые по форме и размеру).

5.5 На окружности красным цветом написали 10 произвольных чисел (не обязательно различных). После этого в каждый из десяти промежутков между соседними красными числами синим цветом записали их разность (из большего вычитали меньшее). Докажите, что все десять синих чисел можно разбить на две группы так, чтобы суммы в этих двух группах совпали.

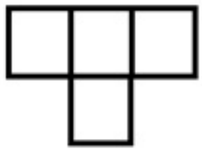
XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

6 класс

6.1 Наблюдатель собирается раздать листочки с текстами олимпиады в двух аудиториях. Количество посадочных мест в них одинаково, в вот количество участников может различаться. Он знает, что всего в этих аудиториях должно быть 150 человек. Когда наблюдатель пересчитал присутствующих, оказалось, что в одной аудитории на 7 участников больше, чем в другой. Докажите, что кто-то всё еще не дошел до своей аудитории.

6.2 Одно натуральное число поделили с остатком на другое. Делимое оканчивается на 1, делитель и частное — на 9. Найдите все возможные цифры, на которые может оканчиваться остаток. Ответ обоснуйте.



К условию задачи 6.3

6.3 У Знайки был большой прямоугольник из фанеры. Однажды Знайка распилил его без остатка на прямоугольники двух видов: 2×3 и 1×4. После этого Незнайка потерял один прямоугольник 1×4 и заменил его «Т-ешкой» (см. рисунок) той же площади, что и потерянный прямоугольник. Докажите, что теперь Знайка не сможет составить из полученных фигурок исходный прямоугольник.

6.4 Петя очень любит математику и вычисляет всё подряд. Например, незадолго до своего дня рождения он подсчитал свой коэффициент радости (КР), и получил, что он равен 62. Формула коэффициента радости, которую использовал Петя, такова: КР $= a - bx$, где x — количество дней до праздника, a и b — некоторые фиксированные положительные числа, не обязательно целые. Известно, что в день рождения коэффициент радости равен 100, а в один из дней того же месяца он равнялся 14. Не ошибся ли Петя при вычислениях? Ответ обоснуйте.

6.5 У Кирилла и Лёши есть 30 карточек. На каждой из карточек есть девять мест для девяти цифр девятизначного числа. Раз в минуту Лёша будет называть одну из двух цифр: 5 или 6, а Кирилл — вписывать названную цифру на любую из карточек в любое из ещё не занятых мест. Так будет продолжаться до тех пор, пока на карточках не будут получены все 30 девятизначных чисел. Лёша хочет, чтобы получилось как можно больше различных чисел, Кирилл — как можно меньше. Сколько различных чисел будет выписано, если оба мальчика действуют наилучшим для себя образом? Ответ обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

7 класс

7.1 У Ани есть бумажный квадрат. Она его согнула по прямой линии, после этого согнула второй и третий раз, также по прямым линиям. После этого Аня взяла иголку и сложенный листок бумаги проткнула насквозь в двух точках, не лежащих на сгибах или краях квадрата. Аня развернула листок и пересчитала полученные дырки в квадрате. Могло ли у неё получиться ровно 13 дырок? Ответ обоснуйте.

7.2 20 мальчиков и 19 девочек пришли на новогодний утренник. Когда все дети встали в хоровод вокруг ёлки, Дед Мороз заметил, что x мальчиков стоят подряд и сообщил об этом Снегурочке. Тогда Снегурочка (она не видит в каком порядке стоят дети в хороводе) сделала абсолютно правильный вывод, что какие-то три девочки тоже стоят подряд. Какое наименьшее возможное значение числа x? Ответ обоснуйте.

7.3 Вдоль прямолинейной дороги расположены 10 деревень: Первая, Вторая, Третья, ..., Десятая (именно в таком порядке), причём количество жителей в каждой деревне соответствует её названию: в Первой живёт один житель, во Второй — два и. т. д. Расстояния между соседними деревнями могут различаться. В одной из деревень необходимо открыть почтовое отделение, при этом суммарное расстояние, которое необходимо пройти всем жителям всех деревень, чтобы добраться до почты, должно быть минимальным. В какой деревне должно появиться отделение? Ответ обоснуйте.

7.4 Шахматную доску (квадрат 8×8) разрезали на доминошки, т. е. на прямоугольники 1×2. В каждой горизонтальной доминошке записали номер строки, в которой она стоит, а в каждой вертикальной — номер столбца, в котором она стоит. Докажите, что сумма всех записанных чисел чётна.

7.5 Дано некоторое натуральное число N. Докажите, что в его десятичной записи можно вычеркнуть несколько цифр (возможно, ни одной) так, чтобы оставшееся число делилось на 7 без остатка, если:

а) число N — сорокатрёхзначное; (3 балла)

б) число N — тридцатитрёхзначное; (3 балла)

в) число N — двадцатитрёхзначное; (3 балла)

г) число N — тринадцатизначное. (5 баллов)

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

8 класс

8.1 Мама дала двум братьям 100 конфет. Младший возмутился: «Как же так, у меня конфет не более половины того количества, что есть у тебя!» Старший ответил: «Ты прав. Ну что ж, я поделюсь с тобой, но отдам тебе не более четверти своих конфет.» Старший брат сдержал свое слово. Могло ли после этого у братьев оказаться одинаковое число конфет? Ответ обоснуйте.

8.2 Расположите на плоскости четыре точки A, B, C, D так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была в два раза меньше площади четырехугольника $ADBC$. (Обратите внимание, что не любая замкнутая четырёхзвенная ломаная является четырехугольником).

8.3 Даны четыре действительных числа x, y, z, k, причём $x \neq y$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, и выполняется соотношение: $\dfrac{yz - x^2}{1 - x} = \dfrac{xz - y^2}{1 - y} = k$. Выразите значение суммы $x + y + z$ через k.

8.4 На шахматной доске (размером 8×8) отмечены 9 клеток: на пересечениях 1-й, 4-й и 7-й горизонталей с 1-й, 4-й и 7-й вертикалями. У Пети и Васи есть 32 бумажных прямоугольника 1×2. Одним таким прямоугольником разрешено покрыть в точности 2 соседние клетки доски. Петя взял 9 прямоугольников и накрыл ими отмеченные клетки. Всегда ли Вася сможет покрыть прямоугольниками оставшуюся часть доски?

8.5 По кругу расставлены натуральные числа от 1 до $2N$, каждое по одному разу. Для каждой пары соседних чисел вычислили их положительную разность, вычтя из большего числа меньшее.

а) Может ли при каком-нибудь значении N сумма всех $2N$ разностей равняться 2019? (2 балла)

б) Какое наименьшее значение может иметь сумма этих $2N$ разностей? (2 балла)

в) Какое наибольшее значение может иметь сумма этих $2N$ разностей? (5 баллов)

г) Найдите все возможные значения суммы этих $2N$ разностей. (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

9 класс

9.1 Найдите все двузначные числа (и докажите, что других нет), обладающие свойством: куб суммы цифр числа равен квадрату самого числа.

9.2 Сказочная шахматная фигура Лягушка каждым своим ходом прыгает либо по вертикали либо по горизонтали. Каждый её прыжок либо короткий (ровно через одну клетку), либо длинный (ровно через две клетки); при этом длины прыжков всегда чередуются. За какое наименьшее число ходов Лягушка может попасть из правой нижней в левую верхнюю клетку стандартной шахматной доски (размера 8×8 клеток)? Ответ обоснуйте.

9.3 Про положительные числа a, b, c известно, что $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{2}{a+b+c}=1$. Докажите, что $abc \geqslant 8$.

9.4 В Вашем распоряжении имеется бесконечный плоский лист бумаги, острый карандаш и два инструмента:

1) *Линейка*, по любым двум точкам позволяющая построить прямую, проходящую через них;

2) *Д-циркуль*, по любым двум точкам A, B позволяющий построить окружность с диаметром AB.

Покажите, как с помощью этого набора инструментов решить следующие задачи:

а) Построить перпендикуляр к заданной прямой l , проходящий через заданную точку M. (3 балла)

б) Для заданных точек X и Y ($X \neq Y$) построить окружность с центром в точке X, проходящую через точку Y. (4 балла)

9.5 Художник имеет карандаши 2019 разных цветов. Он желает выбрать натуральное число n и раскрасить все целые числа от 1 до n (каждое в свой цвет) таким образом, чтобы никакое число по цвету не совпало ни с каким из своих собственных (т. е. не равных ему самому) делителей. Такую раскраску он называет *корректной*.

а) Найдите наименьшее натуральное число n, при котором корректной раскраски не существует. (2 балла)

б) Какое наибольшее количество чисел может оказаться одинакового цвета при $n = 2018$? (3 балла)

в) Для фиксированного числа n назовём числа a и b ($1 \leqslant a < b \leqslant n$) *близнецами*, если корректные раскраски набора чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ существуют, и при каждой из них числа a и b имеют одинаковый цвет. Докажите, что при некотором n существует не менее 1000 пар близнецов. (4 балла)

г) Для каждого натурального числа n художник обозначил через $K(n)$ количество корректных раскрасок набора чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Существует ли такое натуральное число $n > 2$, для которого $0 < K(n) < K(n-1)$? (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

10 класс

10.1 Волк хочет забрать у Козы всех её семерых козлят. Сделать он этом может только в отсутствие Козы. В такой ситуации козлята безоговорочно подчиняются Волку. Волку известно, что Коза отсутствует дома каждый день ровно с 10 до 18 часов. Волк знает также, что придя домой и обнаружив отсутствие козлят, Коза бросится в погоню на своём скоростном автомобиле Феррари и если успеет догнать какого-нибудь козлёнка — то больше ни за что Волку его не отдаст. Правда, если козлёнок будет в доме Волка, то Коза уже ничего не сможет сделать.

Расстояние между домами Волка и Козы 85 км. Козлёнок бегает со скоростью 6 км/ч; Феррари Козы развивает скорость до 340 км/ч. Волк бегает со скоростью 60 км/ч. Кроме того, он может нести в зубах одного козлёнка, правда бежит при этом Волк медленнее: со скоростью 50 км/ч. Сможет ли Волк при этих условиях за один день похитить всех семерых козлят? Ответ обоснуйте.

10.2 Назовём расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски наименьшее число ходов, за которое шахматный король может перейти из одной клетки в другую. Отмечено три клетки с попарными расстояниями, равными 100. Сколько клеток доски находится на расстоянии 50 от каждой этих трех клеток? Ответ обоснуйте.

10.3 Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках K, L. Пусть C — середина KL, а лучи CA, CB образуют прямой угол и пересекают окружности в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на окружности. Верно ли, что эта окружность имеет радиус 1? Ответ обоснуйте.

10.4 Гермиона сказала Гарри Поттеру, что может подставить в выражение $(a_0 + a_1)(a_2 + a_3)\dots(a_{2018}+a_{2019})$ все целые числа от 0 до 2019 (каждое число вместо какого-то a_i) так, чтобы это выражение равнялось квадрату какого-то натурального числа. Гарри Поттер в ответ сообщил, что способен аналогичной подстановкой сделать это выражение равным восьмой степени какого-то натурального числа. Подумав пару минут, Рон Уизли заявил, что он готов подставить эти числа так, чтобы всё выражение было равно восемьсот пятьдесят седьмой степени какого-то натурального числа. Не ошибся ли кто-нибудь из них? Ответ обоснуйте.

10.5 Назовём заданную на всей оси функцию $f(x)$ *красивой*, если у уравнения $f(x) = 0$ имеется три идущих подряд различных корня, образующих арифметическую прогрессию. Назовём функцию $f(x)$ *модной*, если для некоторого действительного a функция $f(x) - a$ красива.

а) Докажите, что всякая нечётная функция, имеющая ровно три различных корня, красива. (2 балла)

б) Докажите, что моден всякий многочлен третьей степени, имеющий три различных корня. (4 балла)

в) Верно ли, что функция $\cos(2^{-x})$ модна? (4 балла)

г) Верно ли, что моден всякий многочлен, имеющий хотя бы три различных корня? (4 балла)

Ответы обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

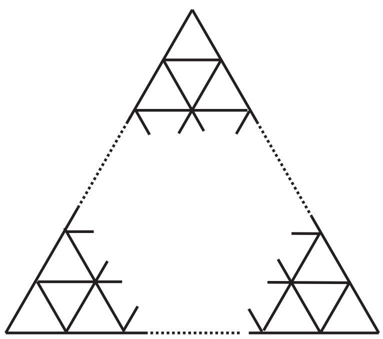
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

11 класс

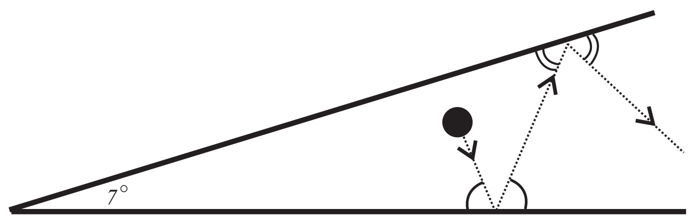
11.1 Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, отличную от константы, такую, что она не принимает отрицательных значений, и для любого действительного числа t выполняется неравенство $f(\sin t) + f(\cos t) \geqslant 4f(\sin t \cdot \cos t)$.

11.2 Дан трёхгранный угол. В каждую из его граней вписали по окружности так, что эти окружности попарно касаются друг друга. Докажите, что существует сфера, содержащая все три окружности.

11.3 План дома представляет собой правильный треугольник со стороной 190 м. Дом разделён перегородками на комнаты в форме треугольника со стороной 10 м каждая (всего комнат 361) — см. рисунок. Вчера в каждой комнате поселилось по таракану. В ночь на сегодня каждый таракан перебрался через перегородку в одну из соседних комнат (комнаты соседние, если они имеют общую стенку-перегородку). Комната считается захламлённой, если в ней находится более одного таракана. Какое наименьшее количество комнат сегодня может оказаться захламлёнными? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 11.3



К условию задачи 11.4

11.4 Два борта бесконечного бильярдного стола пересекаются под углом 7°. На столе лежал шар, который стал двигаться под некоторым углом к борту — см. рисунок. Отражение от бортов абсолютно упругое (угол падения равен углу отражения), трение отсутствует. Известно, что в итоге шар отразился от бортов ровно 10 раз. Определите, сколько раз отразился бы шар от бортов, если бы был выпущен из той же точки, но в противоположном направлении. Ответ обоснуйте.

11.5 Пусть проведён однокруговой теннисный турнир среди $n > 1$ участников (т. е. каждый теннисист сыграл один матч с каждым). За победу в матче теннисист получает 1 очко, за поражение — 0, а ничьих в теннисе не бывает. Будем называть матч *алогичным*, если проигравший в матче набрал по итогам всего турнира очков строго больше, чем победивший.

а) Выберите натуральное число $k \leqslant 4$ и приведите пример турнира, в котором процент алогичных матчей больше или равен $10k$. (k баллов)

б) Покажите, что если n — чётно, то алогичных матчей не может быть больше 75% от общего количества всех матчей. (4 балла)

в) У каждого участника турнира имеется рейтинг, и рейтинги разных теннисистов различны. Назовём матч *странным*, если оба его участника набрали по итогам турнира одинаковое количество очков, но проигравший имеет более высокий рейтинг, чем выигравший. Приведите пример турнира, в котором количество странных матчей больше, чем 74% от общего количества матчей. (2 балла)

г) Может ли случиться так, что доля алогичных матчей в турнире превысит 50%? Ответы обоснуйте. (4 балла)

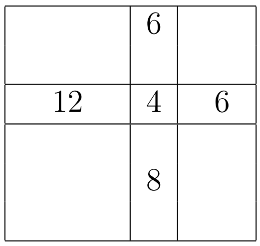
РЕШЕНИЯ

5.1 *На уроке английского языка группе из 10 пятиклассников дали тест. На каждый из вопросов теста правильно ответили ровно 7 пятиклассников. Известно, что девять учеников ответили правильно каждый на 4 вопроса. Сколько правильных ответов дал десятый ученик? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Количество верных ответов, данных в сумме пятиклассниками, делится нацело на 7. Так как девять учеников дали в сумме 36 верных ответов, десятый обязан дать верных ответов по крайней мере 6. С другой стороны эти девять учащихся дали не менее 6 верных ответов на каждый из вопросов теста, значит вопросов было не более, чем $36 : 6 = 6$, и десятый не мог дать больше 6 верных ответов. Ситуация с 6 ответами возможна: в тесте было 6 вопросов, один ответил верно на все, трое — на первые 4, трое — на последние 4, и трое — на два первых и два последних.

ОТВЕТ. 6.

5.2 *Прямоугольник разделён на 9 меньших прямоугольников. Периметры пяти из них известны — см. рисунок, они записаны внутри «своих» прямоугольников. Чему равен периметр исходного прямоугольника? Ответ обоснуйте.*



Решение. Периметр прямоугольника в точности равен периметру «креста», состоящего из малых прямоугольников известного периметра. Периметр «креста» равен сумме периметров четырёх прямоугольников, примыкающих к боковым сторонам исходного прямоугольника, за вычетом длин тех их сторон, которые примыкают к центральному прямоугольнику. Эти стороны в сумме дают как раз периметр центрального прямоугольника. Значит, периметр большого прямоугольника равен $6 + 12 + 6 + 8 - 4 = 28$

ОТВЕТ. 28.

5.3 *Назовем число суммируемым, если оно представимо в виде суммы восьми различных натуральных чисел, причём единственным (с точностью до перестановки слагаемых) образом. Найдите все суммируемые числа и докажите, что других таких чисел нет.*

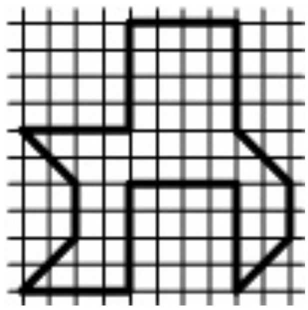
Решение. Наименьшая сумма восьми различных натуральных чисел равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, следующая за ней равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37$. Все остальные такие суммы дают больше, чем 37. Следовательно, числа 36 и 37 суммируемые.

Числа, меньшие 36, не суммируемые, поскольку не представляются никак в виде суммы 8 различных натуральных чисел. Если же число A больше 37, то его можно представить в виде требуемой суммы, как минимум, двумя способами. Во первых, так: $1+2+3+4+5+6+7+d$, где d — разность числа A и суммы $1+2+\ldots+7 = 28$. А во-вторых, так $1+2+3+4+5+6+8+(d-1)$. Эти представления различны, поскольку число d достаточно большое, не менее 10.

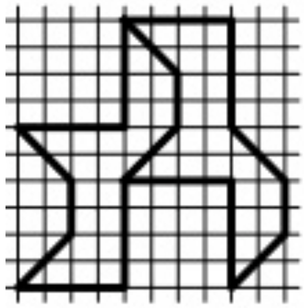
ОТВЕТ. 36 и 37.

5.4 *Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на две равные части (одинаковые по форме и размеру).*

Решение.



К условию задачи 5.2



Требуемое разрезание

Ответ. Требуемое разрезание приведено на рисунке справа.

5.5 *На окружности красным цветом написали* 10 *произвольных чисел (не обязательно различных). После этого в каждый из десяти промежутков между соседними красными числами синим цветом записали их разность (из большего вычитали меньшее). Докажите, что все десять синих чисел можно разбить на две группы так, чтобы суммы в этих двух группах совпали.*

Решение. Первый способ. Рассмотрим произвольное красное число. Пусть оно равно x и стоит между красными числами a и b, где $a \geqslant b$. Возможно три случая.

Случай 1. $a \geqslant c \geqslant b$. Тогда синие числа на дуге ab равны $a - c$ и $c - b$, а их сумма равна $a - b$. Просто сотрём число c.

Случай 2. $c > a$. Тогда синие числа на дуге ab равны $c - a$ и $c - b$, а их разность равна $(c - b) - (c - a) = a - b$. В этом случае сотрём число c, а синее число $c - a$ перекрасим в жёлтый цвет.

Случай 3. $c < b$. Тогда синие числа на дуге ab равны $a - c$ и $b - c$, а их разность равна $(a - c) - (b - c) = a - b$. В этом случае сотрём число c, а синее число $b - c$ перекрасим в жёлтый.

Во всех случаях у нас количество красных чисел уменьшится на 1, и при этом для любой дуги, ограниченной соседними красными числами, если из суммы синих чисел дуги отнять сумму жёлтых, то мы получим разность красных чисел на концах этой дуги.

Проделаем аналогичную операцию 8 раз. При этом если на дуге стоит несколько чисел, а мы желаем дугу перекрасить, то мы синий цвет изменяем на жёлтый, а жёлтый — вновь на синий. В результате получим два красных числа и два набора синих и жёлтых чисел между ними. В каждом наборе сумма синих чисел минус сумма жёлтых чисел одна и та же — это разность оставшихся красных. Теперь по очереди перенесём все жёлтые числа в противоположный набор, перекрашивая их обратно в синий цвет. Легко видеть, что при каждой такой операции равенство суммы синих чисел минус суммы жёлтых чисел набора сохранится. Когда жёлтые числа закончатся, мы получим требуемое разбиение.

Второй способ. Припишем каждой дуге окружности с концами в красных числах (не обязательно соседних) число, равное разности чисел, стоящих на его концах (по-прежнему из большего числа отнимаем меньшее). Возьмём два произвольных красных числа. Они разделят окружность на 2 дуги, которым приписаны равные числа. Отнесём одно из них в первую группу, другое — во вторую. Рассмотрим какое-нибудь третье красное число. Оно делит какую-то из рассмотренных дуг на две. Пусть на концах этой дуги стоят числа a и b (с точностью до обозначений можно считать, что $a \geqslant b$), а третье красное число равно c. Заметим, что если число c лежит между числами a и b, то дуге ab приписано число, равное сумме чисел на дугах ac и bc, а если число c одновременно больше или одновременно меньше чисел a и b, то дуге ab приписано число, равное разности чисел на дугах ac и bc. Пусть также число, соответствующее дуге ab, отнесено к первой группе. В первом случае заменим это число на два числа, соответствующие дугам ac и bc. Во втором заменим его на большее из чисел, а меньшее отнесём ко второму набору. В обоих случаях суммы чисел в каждом наборах останутся равными. Повторим эту операцию ещё 7 раз — в наборах останутся все синие числа. Требуемое разбиение получено.

Третий способ. Рассмотрим все 10 пар соседних по окружности красных чисел. Если в некоторой такой паре число справа (если смотреть из центра окружности) больше числа слева, то стоящее между ними синее число отправим в первую группу, в противном случае — во вторую. Покажем, что при этом суммы синих чисел в первой и второй группах одинаковы. Выберем произвольное красное число и пройдем круг по часовой стрелке. Давайте считать, что красные числа задают некую характеристику тех точек, в которых они стоят, например, высоту этих точек над уровнем моря. Тогда синие числа означают разность высот в соседних точках. При этом число будет отправлено в первую группу, если мы при переходе в новую красную точку поднялись, и во вторую — если опустились (или остались на том же уровне). Пройдя круг, мы будем на той же высоте, что и в начале, т. е. суммарная длина подъёмов равняется суммарной длине спусков. Это и означает равенство сумм синих чисел в группах.

Примечание. Как видно из любого решения, число 10 в условии задачи не принципиально. Утверждение остаётся верным, если вместо 10 взять любое натуральное число, большее 1.

6 класс

6.1 *Наблюдатель собирается раздать листочки с текстами олимпиады в двух аудиториях. Количество посадочных мест в них одинаково, в вот количество участников может различаться. Он знает, что всего в этих аудиториях должно быть 150 человек. Когда наблюдатель пересчитал присутствующих, оказалось, что в одной аудитории на 7 участников больше, чем в другой. Докажите, что кто-то всё еще не дошел до своей аудитории.*

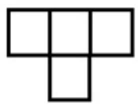
Решение. Если в одной аудитории людей на 7 меньше, чем в другой, то в одной аудитории количество людей чётно, а в другой — нечётно. Значит, в аудиториях в сумме сидит нечётное число школьников, чего быть не может, если все дети уже на олимпиаде.

6.2 *Одно натуральное число поделили с остатком на другое. Делимое оканчивается на* 1*, делитель и частное — на* 9*. Найдите все возможные цифры, на которые может оканчиваться остаток. Ответ обоснуйте.*

Решение. Произведение делителя и частного оканчивается на ту же цифру, что и произведение двух девяток, т. е. на 1. Остаток есть разность между делимым и произведением частного на делитель. Последняя цифра этой разности равна $1 - 1 = 0$.

ОТВЕТ. Только на 0.

6.3 *У Знайки был большой прямоугольник из фанеры. Однажды Знайка распилил его без остатка на прямоугольники двух видов:* 2×3 *и* 1×4*. После этого Незнайка потерял один прямоугольник* 1×4 *и заменил его «Т-ешкой» (см. рисунок) той же площади, что и потерянный прямоугольник. Докажите, что теперь Знайка не сможет составить из полученных фигурок исходный прямоугольник.*



К условию задачи 6.3

Решение. Предположим противное, пусть Знайка прямоугольник составил. Раскрасим его в шахматном порядке. Заметим, что если длина или ширина прямоугольника чётны, то чёрных и белых клеток на ней будет поровну, а если обе они нечётны, то клеток одного цвета (того, в который окрашены углы прямлугольника) будет ровно на одну больше. Но на каждом маленьком прямоугольнике окажется поровну чёрных и белых клеток, а на единственной Т-ешке — либо три чёрных и одна белая, либо три белых и одна чёрная. В обоих случаях клеток одного цвета окажется на два больше, чем другого. Противоречие.

6.4 *Петя очень любит математику и вычисляет всё подряд. Например, незадолго до своего дня рождения он подсчитал свой коэффициент радости (КР), и получил, что он равен* 62*. Формула коэффициента радости, которую использовал Петя, такова: КР* $= a - bx$*, где* x *— количество дней до праздника,* a *и* b *— некоторые фиксированные положительные числа, не обязательно целые. Известно, что в день рождения коэффициент радости равен* 100*, а в один из дней того же месяца он равнялся* 14*. Не ошибся ли Петя при вычислениях? Ответ обоснуйте.*

Решение. В день рождения $x = 0$, поэтому $100 = a - b \cdot 0$, откуда $a = 100$. За n дней до праздника он равнялся 14, то есть $14 = 100 - bn$, и при этом $n \leqslant 30$, так как разница между любыми двумя днями одного месяца не больше 30. Если Петя вычислял КР за y дней до праздника, и не ошибся, то $62 = 100 - by$. Из этих двух уравнений имеем $bn = 86$, $by = 38$. Умножив обе части первого уравнения на y, а второго — на n получим $86y = bny = 38n$, откуда $43y = 19n$ и, значит, n делится на 43. Но это невозможно, так как n — натуральное число, меньшее 30. Значит, Петя ошибся.

Ответ. Петя ошибся.

6.5 *У Кирилла и Лёши есть* 30 *карточек. На каждой из карточек есть девять мест для девяти цифр девятизначного числа. Раз в минуту Лёша будет называть одну из двух цифр:* 5 *или* 6, *а Кирилл — вписывать названную цифру на любую из карточек в любое из ещё не занятых мест. Так будет продолжаться до тех пор, пока на карточках не будут получены все 30 девятизначных чисел. Лёша хочет, чтобы получилось как можно больше различных чисел, Кирилл — как можно меньше. Сколько различных чисел будет выписано, если оба мальчика действуют наилучшим для себя образом? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть Лёша назовёт первый раз цифру 5, а все остальные разы цифру 6. Тогда ровно в одном числе встретится цифра 6, и в итоге будет выписано два различных числа. Значит, Кирилл не сможет сделать все числа одинаковыми.

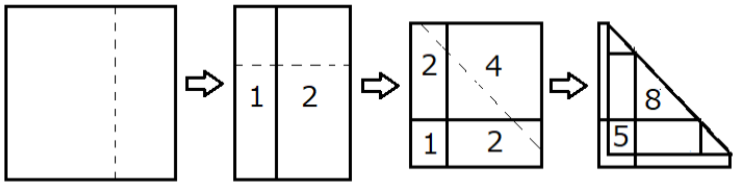
Покажем, что Кирилл вне зависимости от того, какие числа называет Лёша сможет добиться того, чтобы трёх различных чисел не было. Вот его стратегия. Если Лёша называет цифру 5, он её записывает как первую цифру числа на карточке, если 6 — как вторую. Если нет возможности это сделать, значит, соответствующий разряд во всех числах заполнен одной и той же цифрой. Тогда Кирилл начинает заполнять новый разряд и тоже записывает в него всё время одну и то же цифру. И только в случае, когда нового разряда уже нет, Кирилл заполняет оставшиеся позиции произвольно. В результате все 30 чисел будут отличаться только в одном разряде. Так как в этом разряде будет стоять либо 5, либо 6, то больше двух различных чисел не получится.

Ответ. 2 числа.

7 класс

7.1 *У Ани есть бумажный квадрат. Она его согнула по прямой линии, после этого согнула второй и третий раз, также по прямым линиям. После этого Аня взяла иголку и сложенный листок бумаги проткнула насквозь в двух точках, не лежащих на сгибах или краях квадрата. Аня развернула листок и пересчитала полученные дырки в квадрате. Могло ли у неё получиться ровно* 13 *дырок? Ответ обоснуйте.*

Решение. Приведём один из возможных способов сгибания квадрата.



К решению задачи 7.1

Обозначим на рисунке числами количество слоев бумаги. Аня могла проткнуть квадрат в частях, где бумага сложена в 5 и 8 слоев, получив тем самым ровно 13 дырок.

ОТВЕТ. Могло.

7.2 20 *мальчиков и* 19 *девочек пришли на новогодний утренник. Когда все дети встали в хоровод вокруг ёлки, Дед Мороз заметил, что x мальчиков стоят подряд и сообщил об этом Снегурочке. Тогда Снегурочка (она не видит в каком порядке стоят дети в хороводе) сделала абсолютно правильный вывод, что какие-то три девочки тоже стоят подряд. Какое наименьшее возможное значение числа x? Ответ обоснуйте.*

Решение. Назовём *компанией* группу из стоящих подряд девочек, с обеих сторон от которой стоят мальчики. Каждая девочка входит в одну компанию. Если количество компаний равно $k \leqslant 9$, то Снегурочка может утверждать, что есть компания из не менее чем трёх девочек. Действительно, если бы все компании состояли не более, чем из двух девочек, то общее количество девочек было бы не больше $2 \cdot 9 = 18$, что противоречит условию. Если же компаний не меньше 10, то девочки могут стоять по двое или по одиночке, и Снегурочка не может сделать соответствующий вывод.

Теперь заметим, что помимо группы из x мальчиков есть еще не менее $k - 1$ мальчика, которые разделяют компании девочек между собой. При $x > 12$ остаётся не больше 8 мальчиков, разделяющих компании, следовательно, компаний не больше 9. При $x \leqslant 11$ таких мальчиков не меньше 9, и можно разделить всех девочек на 10 компаний.

ОТВЕТ. 12.

7.3 *Вдоль прямолинейной дороги расположены* 10 *деревень: Первая, Вторая, Третья, …, Десятая (именно в таком порядке), причём количество жителей в каждой деревне соответствует её названию: в Первой живёт один житель, во Второй — два и. т. д. Расстояния между соседними деревнями могут различаться. В одной из деревень необходимо открыть почтовое отделение, при этом суммарное расстояние, которое необходимо пройти всем жителям всех деревень, чтобы добраться до почты, должно быть минимальным. В какой деревне должно появиться отделение? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть почтальон едет от Первой до Десятой деревни (скажем, слева направо) и в каждой посещённой деревне вычисляет суммарные расстояния, которые необходимо пройти до неё всем жителям слева и всем жителям справа. Заметим, что если почтальон сдвигается вправо на расстояние x километров (расстояние между соседними деревнями), то каждому жителю слева придется идти на x километров больше, а каждому справа — на x километров меньше. Таким образом, если слева жителей больше, то суммарное расстояние увеличится, если меньше — то уменьшится. Общее количество жителей равно $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$. Пока почтальон не доехал до деревни Седьмая, слева жителей не больше $1+2+\ldots+6 = 21$, то есть меньше половины, и по мере движения почтальона суммарное расстояние уменьшается. Как только почтальон выедет из деревни Седьмая, слева будет не меньше $1+2+\ldots+7 = 28$ жителей, то есть больше половины, и суммарное расстояние будет увеличиваться. Следовательно, почтовое отделение должно быть открыто в деревне Седьмая.

ОТВЕТ. В деревне Седьмая.

7.4 *Шахматную доску (квадрат 8×8) разрезали на доминошки, т. е. на прямоугольники 1×2. В каждой горизонтальной доминошке записали номер строки, в которой она стоит, а в каждой вертикальной — номер столбца, в котором она стоит. Докажите, что сумма всех записанных чисел чётна.*

Решение. Рассмотрим 16 клеток, стоящих на пересечениях строк и столбцов с нечётными номерами. Каждая доминошка, в которой записано нечётное число, содержит ровно одну из таких клеток. Каждая доминошка, в которой записано чётное число, не содержит таких клеток. Следовательно, ровно 16 записанных чисел нечётны, то есть сумма всех чисел чётна.

7.5 *Дано некоторое натуральное число N. Докажите, что в его десятичной записи можно вычеркнуть несколько цифр (возможно, ни одной) так, чтобы оставшееся число делилось на 7 без остатка, если:*
а) число N — сорокатрёхзначное;
б) число N — тридцатитрёхзначное;
в) число N — двадцатитрёхзначное;
г) число N — тринадцатизначное.

Решение. Все пункты задачи будем решать «от противного», т. е. предположим, что в числе N нельзя вычеркнуть цифры так, чтобы осталось число, кратное 7.

а) Заметим, что в числе N нет цифр 0 и 7, иначе можно вычеркнуть все цифры, кроме одной. Кроме того, число 111111 делится на 7, поэтому любое число из шести одинаковых цифр тоже делится на 7. Поэтому в числе N нет и шести одинаковых цифр. Следовательно, число N содержит только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 не более чем по 5 раз каждую, то есть не больше 40 цифр. Противоречие.

б) Пусть в числе N есть восьмёрка. Заменим её на единицу. Тогда любое число, содержащее заменённую цифру после вычёркивания цифр, уменьшится на 7 в одном разряде, то есть его остаток при делении на 7 не изменится. Аналогично произойдёт и при замене девятки на двойку. Если так заменить все восьмёрки и девятки, то и в новом числе не может быть шести одинаковых цифр (шестизначное число поделится на 7 вне зависимости от того, заменялись ли в нем цифры). Соответственно, новое число (обозначим его за M) содержит только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 не более чем по 5 раз, то есть не больше 30 цифр. Противоречие.

в) Пусть в числе M одновременно оказались цифры 1, 2 и 4. Так как числа 14, 21 и 42 делятся на 7, никакая из этих трех цифр не может находиться в числе левее всех остальных. Такое невозможно. Аналогично, числа 35, 56, 63 делятся на 7. Таким образом, в числе M есть не более двух цифр из набора $\{1, 2, 4\}$ и не более двух цифр из набора $\{3, 5, 6\}$ не более чем по 5 раз, то есть не более 20 цифр. Тогда и в N не более 20 цифр. Противоречие.

г) Пусть в числе M из набора 1, 2, 4 есть только единицы и двойки. Число 21 делится на 7, следовательно, все единицы стоят раньше двоек. Число 112 делится на 7, следовательно, единица может быть максимум одна, а двоек, по-прежнему, не больше пяти. Или же двоек нет совсем, тогда единиц не больше пяти. То есть общее количество единиц и двоек в любом случае не превосходит шести. Аналогично найдем пары чисел, кратных 7, для других цифр: 42 и 224, 14 и 441, 35 и 553, 56 и 665, 63 и 336. Итак, в числе M есть не более шести цифр из набора $\{1, 2, 4\}$ и шести цифр из набора $\{3, 5, 6\}$ с учётом всех повторений, то есть не более 12 цифр. Тогда и в числе N не более 12 цифр. Противоречие.

8 класс

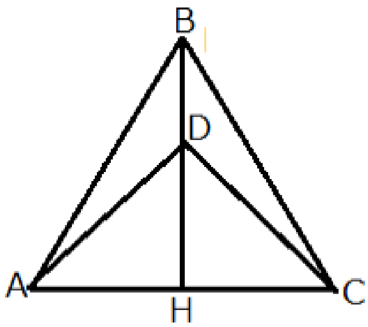
8.1 *Мама дала двум братьям* 100 *конфет. Младший возмутился: «Как же так, у меня конфет не более половины того количества, что есть у тебя!» Старший ответил: «Ты прав. Ну что ж, я поделюсь с тобой, но отдам тебе не более четверти своих конфет.» Старший брат сдержал свое слово. Могло ли после этого у братьев оказаться одинаковое число конфет? Ответ обоснуйте.*

Решение. До передачи конфет у старшего было не меньше двух третей всех конфет. Учитывая, что $100 \cdot \frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}$, у старшего было не меньше 67 конфет. После передачи у него осталось не менее трех четвертей изначального количества. Учитывая, что $67 \cdot \frac{3}{4} = 50\frac{1}{4}$, у старшего осталось не меньше 51 конфеты. Тогда у младшего — не больше 49, и одинакового количества быть не могло.

ОТВЕТ. Не могло.

8.2 *Расположите на плоскости четыре точки A, B, C, D так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была в два раза меньше площади четырехугольника $ADBC$. (Обратите внимание, что не любая замкнутая четырёхзвенная ломаная является четырёхугольником.)*

Решение. Расположим точки A, B, C в вершинах равностороннего треугольника, а точку D расположим на высоте BH так, чтобы она делила BH в отношении $2:3$, считая от вершины B (см. рисунок).



К решению задачи 8.2

Тогда $S_{ABC} = BH \cdot HC$, $S_{ABD} = S_{BDC} = BD \cdot \frac{HC}{2} = 0,2 \cdot S_{ABC}$, $S_{ADH} = S_{DHC} = DH \cdot \frac{HC}{2} = 0,3 \cdot S_{ABC}$, $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = 0,4 \cdot S_{ABC}$ и $S_{ADBC} = S_{ADH} + S_{DHC} + S_{BDC} = 0,8 \cdot S_{ABC} = 2S_{ABCD}$. Существуют и другие решения.

8.3 *Даны четыре действительных числа x, y, z, k, причём $x \neq y$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, и выполняется соотношение: $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y} = k$. Выразите значение суммы $x + y + z$ через k.*

Решение. Обе части равенства $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$ умножим на произведение знаменателей (оно не равно нулю) и перенесём все слагаемые в левую часть. Получим уравнение

$$yz - x^2 - y^2z + x^2y - xz + y^2 + x^2z - xy^2 = 0$$

$$z(y - x) + (y^2 - x^2) - z(y^2 - x^2) - xy(y - x) = 0$$

$$(y - x)(z + y + x - z(y + x) - xy) = 0$$

$$z + y + x - zy - zx - xy = 0$$

(на $y - x$ можно сократить, так как $x \neq y$). Теперь выразим из полученного равенства произведение yz и подставим его в первую дробь. Получим

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{x+y+z-xy-xz-x^2}{1-x} = \frac{(x-x^2)+(y-xy)+(z-xz)}{1-x} =$$

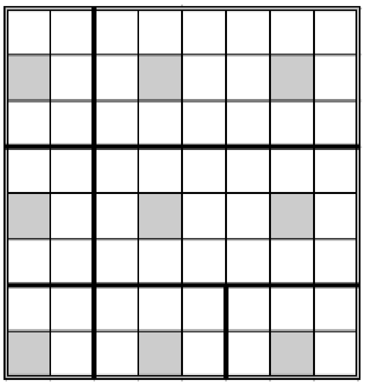
$$= \frac{x(1-x)+y(1-x)+1(1-x)}{1-x} = x+y+z.$$

Значит, $x + y + z = k$.

ОТВЕТ. $x + y + z = k$.

8.4 *На шахматной доске (размером 8×8) отмечены 9 клеток: на пересечениях 1-й, 4-й и 7-й горизонталей с 1-й, 4-й и 7-й вертикалями. У Пети и Васи есть 32 бумажных прямоугольника 1×2. Одним таким прямоугольником разрешено покрыть в точности 2 соседние клетки доски. Петя взял 9 прямоугольников и накрыл ими отмеченные клетки. Всегда ли Вася сможет покрыть прямоугольниками оставшуюся часть доски?*

Решение. Разделим шахматную доску на 7 частей: квадрат 2×2, четыре прямоугольника 2×3 и два прямоугольника 3×6 как показано на рисунке. Покажем, что Вася сможет покрыть прямоугольниками каждую из этих частей по отдельности.



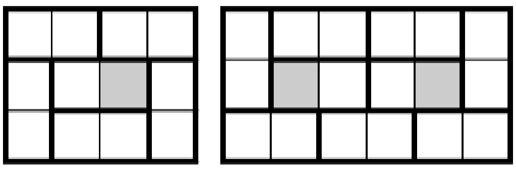
К решению задачи 8.4

Заметим, что прямоугольники, которые поместил Петя, не выходят за пределы указанных частей.

В квадрате 2×2 всегда остаётся непокрытым один прямоугольник 1×2; его Вася и накрывает.

В прямоугольнике 2×3 остаётся либо два прямоугольника 1×2, либо четыре клетки в форме буквы «Г». В обоих случаях Вася, очевидно, накроет оставшуюся часть.

Прямоугольник 3×6 мысленно разделим на три прямоугольника 3×2. Если Петины прямоугольники не выходят за пределы этих маленьких прямоугольников, то Вася может их покрыть так же, как описано выше. Если же одна или две «доминошки» выходят за границы этих маленьких прямоугольников, то Вася может накрыть так, как показано ниже.



К решению задачи 8.4

Ответ. Всегда.

8.5 *По кругу расставлены натуральные числа от* 1 *до* $2N$*, каждое по одному разу. Для каждой пары соседних чисел вычислили их положительную разность, вычтя из большего числа меньшее.*

а) Может ли при каком-нибудь значении N *сумма всех* $2N$ *разностей равняться* 2019*? (2 балла)*

б) Какое наименьшее значение может иметь сумма этих $2N$ *разностей? (2 балла)*

в) Какое наибольшее значение может иметь сумма этих $2N$ *разностей? (5 баллов)*

г) Найдите все возможные значения суммы этих $2N$ *разностей.*

Ответы обоснуйте.

Решение. Для удобства будем обозначать числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2N}$ в порядке их следования по кругу.

а) Сумма разностей равна $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{2N} - a_1|$. При раскрытии всех модулей каждое из чисел будет участвовать в сумме дважды, с плюсом либо минусом. Следовательно, у каждого числа в сумме коэффициент будет равен -2, 0 или 2, то есть чётному числу. Но тогда и вся сумма чётна. Число 2019 нечётно и не может являться значением этой суммы.

б) Пусть $a_m = 1$, $a_n = 2N$; без ограничения общности можно считать, что $n > m$. Заметим, что $|a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| \geqslant |a_m - a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} - a_n| = a_n - a_m = 2N - 1$. Аналогично можно оценить снизу и сумму всех разностей на другой дуге между числами 1 и $2N$. Следовательно, сумма всех разностей не может быть меньше $2(2N - 1) = 4N - 2$. Для получения этой разности числа можно расположить по кругу в порядке $1, 2, 3, \ldots, 2N$. В этом случае среди всех $2N$ разностей ровно $2N - 1$ разность равна 1, и одна разность равна $2N - 1$, что даёт полученную в оценке сумму.

в) Рассмотрим сумму модулей, указанную в пункте а). Каждое слагаемое a_k при раскрытии модуля будет с коэффициентом 2, если оно было больше своих соседей, с коэффициентом -2, если меньше своих соседей, и с коэффициентом 0, если оно больше одного и меньше другого из своих соседей. В первом случае будем называть a_k *локальным максимумом*, во втором — *локальным минимумом*. В третьем случае тройка соседних чисел упорядочена по возрастанию или убыванию. Заметим, что локальные максимумы и минимумы по кругу чередуются, а все числа между ними упорядочены по возрастанию или убыванию. Таким образом, количество локальных максимумов равно количеству локальных минимумов, а сумма всех разностей равна удвоенной сумме всех локальных максимумов минус удвоенная сумма всех локальных минимумов.

Теперь найдём наибольшее значение этой суммы. Если не все $2N$ чисел являются локальными максимумами или минимумами, то остаётся чётное число чисел, то есть не меньше двух. Возьмём два таких числа и добавим большее из них к множеству локальных максимумов, а меньшее — к множеству локальных минимумов. Тогда значение суммы разностей увеличится. Далее, если минимальный из локальных максимумов меньше какого-то локального минимума, то перенесем оба числа в другие множества (меньшее – в минимумы, большее — в максимумы). Такая операция тоже увеличит сумму. Следовательно, наибольшее значение суммы достигается, когда множеством локальных минимумов является набор $\{1, 2, \ldots, N\}$, а максимумов — $\{N + 1, N + 2, \ldots, 2N\}$, и равно $2((N + 1 + \ldots + 2N) - (1 + \ldots + N)) = 2((N + 1 - 1) + \ldots + (2N - N)) = 2N^2$. Достигнуть этого можно, располагая числа в порядке $1, N + 1, 2, N + 2, 3, \ldots, 2N - 1, N, 2N$.

г) В предыдущих пунктах показано, что значение суммы обязательно чётно и зависит только от наборов локальных минимумов и максимумов. Будем строить примеры так, чтобы все локальные максимумы были строго больше всех локальных минимумов, следующим по часовой стрелке за максимумом $2N$ был минимум 1, а все числа, не входящие в два множества, стояли в порядке убывания именно между $2N$ и 1. Тогда остальные максимумы и минимумы можно располагать на другой дуге между $2N$ и 1 в любом порядке (с учётом чередования).

Построим алгоритм, позволяющий увеличивать разность суммы локальных максимумов и минимумов на 1 с каждой итерацией. Начнём с пары чисел $(1; 2N)$, назовём её *послед-*

ней парой, меньшее число в паре входит в множество минимумов, большее — в множество максимумов. Тогда:

Если последняя пара имеет вид $(k;\ 2N+1-k)$, добавим новую пару $(k+1;\ k+2)$ в качестве последней.

Если последняя пара имеет другой вид, то увеличим второе число этой пары на 1.

Нетрудно видеть, что первая операция добавляет пару неиспользованных чисел в случае, если множество минимумов имеет вид $\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, максимумов — $\{2N+1-k,\ \ldots,\ 2N\}$, а вторая операция приводит множества к такому виду. При этом обе операции увеличивают разность максимумов и минимумов на 1, а сумму всех разностей — на 2. Таким образом, все чётные числа в указанном промежутке могут быть получены.

Ответ. а) Не может. б) $4N-2$. в) $2N^2$. г) Любое чётное число из отрезка $[4N-2;\ 2N^2]$.

9 класс

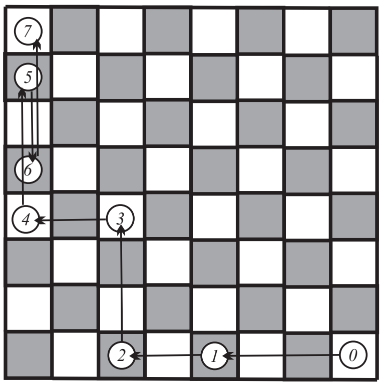
9.1 *Найдите все двузначные числа (и докажите, что других нет), обладающие свойством: куб суммы цифр числа равен квадрату самого числа.*

Решение. Пусть число n удовлетворяет заявленному свойству. Обозначим сумму его цифр через k . Так как $n^2 = k^3 = k^2 \cdot k$, число k является квадратом некоторого натурального числа s. Так как сумма цифр двузначного числа не превосходит 18, число k может равняться только 1, 4, 9 или 16. Соответственно s может быть только 1, 2, 3 или 4. Учитывая, что $n^2 = k^3 = (s^2)^3 = s^6$, имеем $n = s^3$, т. е. n одно из чисел 1, 8, 27 и 64. Так как n — двузначное число, случаи $n = 1$ и $n = 8$ невозможны. Число 64 не годится, так как его сумма цифр равна 10, а не 16. Число 27 удовлетворяет всем условиям задачи.

ОТВЕТ. Только число 27.

9.2 *Сказочная шахматная фигура Лягушка каждым своим ходом прыгает либо по вертикали либо по горизонтали. Каждый её прыжок либо короткий (ровно через одну клетку), либо длинный (ровно через две клетки); при этом длины прыжков всегда чередуются. За какое наименьшее число ходов Лягушка может попасть из правой нижней в левую верхнюю клетку стандартной шахматной доски (размера 8×8 клеток)? Ответ обоснуйте.*

Решение. Лягушка может достичь цели за 7 ходов. Вот один из возможных её маршрутов (см. рисунок).



К решению задачи 9.2

Докажем, что Лягушка не справится менее, чем за 7 ходов. Стартовая и конечная клетки её маршрута — противоположные угловые клетки шахматной доски — имеют одинаковый цвет. Заметим, что после любых двух последовательных ходов Лягушка переместится на клетку противоположного цвета. Значит через 6 ходов цвет клетки, на которой она окажется, будет отличаться от цвета конечной клетки. Если же Лягушка прыгнула менее 6 раз, то в итоге она пройдёт не более, чем $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$ клеток, а ей необходимо пройти минимум 14 клеток: 7 по вертикали и 7 по горизонтали. Поэтому для достижения цели Лягушке потребуется не менее 7 ходов.

ОТВЕТ. За 7 ходов.

9.3 *Про положительные числа a, b, c известно, что* $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{2}{a+b+c} = 1$. *Докажите, что $abc \geqslant 8$.*

Решение. <u>Способ 1.</u> Пусть $a + b + c = x$, $abc = y$. Тогда

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{2}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{abc} + \frac{2}{a+b+c} = \frac{x}{y} + \frac{2}{x} = 1.$$

Получившееся уравнение равносильно уравнению $x^2 + 2y = xy$. Умножим обе его части на 4 и после равносильных преобразований получим $(2x - y)^2 = y(y - 8)$. Отсюда ввиду положительности числа y имеем $y - 8 = \dfrac{(2x - y)^2}{y} \geqslant 0$ и $y \geqslant 8$, что и требовалось доказать.

Способ 2. $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{a+b+c}{abc}$. Так как числа $a+b+c$ и abc положительны, можно применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Получим $1 = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{2}{a+b+c} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{a+b+c}{abc} \cdot \dfrac{2}{a+b+c}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{abc}}$. После возведения неравенства в квадрат (что допустимо, так как обе его части положительны) получим требуемое неравенство.

9.4 *В Вашем распоряжении имеется бесконечный плоский лист бумаги, острый карандаш и два инструмента:*

1) Линейка, по любым двум точкам позволяющая построить прямую, проходящую через них;

2) Д-циркуль, по любым двум точкам A B позволяющий построить окружность с диаметром AB.

Покажите, как с помощью этого набора инструментов решить следующие задачи:

а) Построить перпендикуляр к заданной прямой l , проходящий через заданную точку M.

б) Для заданных точек X и Y ($X \neq Y$) построить окружность с центром в точке X, проходящую через точку Y.

Решение. а) Если точка M лежит не на прямой l, то отметим на прямой l произвольную точку N и построим окружность с диаметром MN. Если построенная окружность касается прямой l, то MN — искомый перпендикуляр. Если же окружность вторично пересекает прямую l в некоторой точке K, то угол MKN прямой, так как опирается на диаметр, и MK — искомый перпендикуляр.

Если же точка M лежит на прямой l, то через произвольную точку P вне прямой l, проведём, как было показано выше, прямую a, перпендикулярную l, а затем через произвольную точку Q вне прямых a и l проведём прямую b, перпендикулярную к a. Прямые b и l параллельны, поэтому далее мы строим перпендикуляр из точки M на прямую b, который также окажется перпендикуляром к прямой l.

б) Проведём прямую l через точки X и Y. Затем построим перпендикуляр к прямой l, проходящий через точку X, и отметим на нём произвольную точку Z. Пусть точка M — основание перпендикуляра, проведённого из точки X к прямой YZ. На отрезке XZ, как на диаметре, построим окружность. Из точки M проведём перпендикуляр к прямой XZ, который пересечёт построенную окружность в точке N. Точку пересечения прямых ZN и l обозначим V. В силу симметрии, треугольники MXZ и NXZ равны, значит, $\angle MZX = \angle NZX$. Высота ZX треугольника YZV является также и биссектрисой, а, следовательно, и медианой, то есть $YX = XV$. Окружность с диаметром YV является искомой.

9.5 *Художник имеет карандаши 2019 разных цветов. Он желает выбрать натуральное число n и раскрасить все целые числа от 1 до n (каждое в свой цвет) таким образом, чтобы никакое число по цвету не совпало ни с каким из своих собственных (т. е. не равных ему самому) делителей. Такую раскраску он называет корректной.*

а) Найдите наименьшее натуральное число n, при котором корректной раскраски не существует.

б) Какое наибольшее количество чисел может оказаться одинакового цвета при $n = 2018$?

в) Для фиксированного числа n назовём числа a и b ($1 \leqslant a < b \leqslant n$) близнецами, если корректные раскраски набора чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ существуют, и при каждой из них числа a

и b имеют одинаковый цвет. Докажите, что при некотором n существует не менее 1000 *пар близнецов.*

г) Для каждого натурального числа n художник обозначил через $K(n)$ количество корректных раскрасок набора чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Существует ли такое натуральное число $n > 2$, для которого $0 < K(n) < K(n-1)$?

Ответы обоснуйте.

Решение. а) **ОТВЕТ.** 2^{2019}.

При $n = 2^{2019}$ раскраски не существует. В самом деле, рассмотрим произвольную раскраску набора чисел $\{1, 2, 2^2, \ldots 2^{2019}\}$ (как покрашены остальные числа — не важно). В нём 2020 чисел, и каждое большее делится на каждое меньшее. По принципу Дирихле в нём есть два числа, окрашенных в один цвет. Значит, раскраска некорректна.

Приведём пример корректной раскраски при $n = 2^{2019} - 1$. Все числа разобъём на блоки вида $\{2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1\}$, k — целое неотрицательное число, меньшее 2018. Числа каждого блока покрасим в свой цвет. Поскольку внутри одного блока все числа отличаются менее, чем в 2 раза, в нём нет двух чисел, делящихся одно на другое. Следовательно, раскраска корректна.

б) **ОТВЕТ.** 1009.

Приведем пример раскраски, при которой ответ достигается. Все числа от 2010 до 2018 покрасим в белый. Останется 1009 не покрашенных чисел и 2018 не использованных цветов, так что каждое число от 1 до 1009 попросту покрасим в собственный уникальный цвет. Нетрудно видеть, что раскраска корректна.

Покажем, что при корректной раскраске ни в какой цвет не может быть окрашено более 1009 чисел. Для этого поделим все числа, не превосходящие 2018, на группы вида $\{n, 2n, 4n, 8n, \ldots\}$, где n — нечётное число. Таких групп столько же, сколько нечётных чисел в данном диапазоне, т. е. 1009. При этом при корректной раскраске в одной группе не может быть двух чисел одного цвета, поэтому каждым цветом закрашено не более одного числа из каждой группы.

в) Пусть $n = 3 \cdot 2^{2017}$ (можно также в качестве n взять любое число из интервала $(3 \cdot 2^{2017}, 2^{2019})$). Согласно пункту а корректные раскраски существуют. Покажем, что числа $a = 2^k$ и $b = 2^{k-1} \cdot 3$ являются близнецами при всех $k = 1, 2 \ldots, 2018$. Это даст нам сразу 2018 пар близнецов. Действительно, зафиксируем произвольное натуральное $k \leqslant 2018$. Рассмотрим наборы чисел $\{1, 2, \ldots, 2^{k-1}, 2^k, 2^k \cdot 3, 2^{k+1} \cdot 3, \ldots, 2^{2017} \cdot 3\}$ и $\{1, 2, \ldots, 2^{k-1}, 2^{k-1} \cdot 3, 2^k \cdot 3, 2^{k+1} \cdot 3, \ldots, 2^{2017} \cdot 3\}$. В каждом из них по 2019 чисел и любое большее число делится на меньшее. Значит, для раскраски каждого набора использованы все 2019 цветов; в каждом наборе каждый цвет использован один раз. Поскольку наборы отличаются только заменой числа $a = 2^k$ на число $b = 2^{k-1} \cdot 3$, эти два числа окрашены одинаково.

г) **ОТВЕТ.** Существует.

Подойдёт число n из пункта в): $n = 2^{2017} \cdot 3$. Действительно, $K(n) > 0$ в силу пункта а. Далее, всякая корректная раскраска набора для набора $A = \{1, 2, \ldots, 2^{2017} \cdot 3\}$ индуцирует корректную раскраску для набора $B = A \setminus \{n\} = \{1, 2, \ldots, 2^{2017} \cdot 3 - 1\}$. При этом разные раскраски набора A дают разные раскраски набора B, ведь раскраска всех чисел вида 2^k однозначно определяет раскраску всех чисел вида $2^k \cdot 3$ (в частности, числа n, которым различаются наборы A и B) — см. пункт в. Значит, $K(n) \leqslant K(n-1)$. Для доказательства строгого неравенства достаточно, следовательно, найти ещё хотя бы одну корректную раскраску набора B. Для этого возьмём произвольную корректную раскраску набора A и в раскраске набора B, который она индуцирует, перекрасим ровно одно число. Конкретно перекрасим число $a = 2^{2016} \cdot 3$ в цвет числа n (как показано в пункте в, он же — цвет числа 2^{2018}). Раскраска останется корректной, поскольку все делители числа a являются также и делителями числа n, а чисел, которые бы делились на a, в наборе B просто нет. При этом полученная раскраска не может быть получена, как индуцированная, ввиду того, что при индуцированной раскраске числа a и 2^{2017} должны быть окрашены в один цвет, а в полученной раскраске в один цвет окрашены числа a и 2^{2018}.

10 класс

10.1 *Волк хочет забрать у Козы всех её семерых козлят. Сделать он этом может только в отсутствие Козы. В такой ситуации козлята безоговорочно подчиняются Волку. Волку известно, что Коза отсутствует дома каждый день ровно с* 10 *до* 18 *часов. Волк знает также, что придя домой и обнаружив отсутствие козлят, Коза бросится в погоню на своём скоростном автомобиле Феррари и если успеет догнать какого-нибудь козлёнка — то больше ни за что Волку его не отдаст. Правда, если козлёнок будет в доме Волка, то Коза уже ничего не сможет сделать.*

Расстояние между домами Волка и Козы 85 *км. Козлёнок бегает со скоростью* 6 *км/ч; Феррари Козы развивает скорость до* 340 *км/ч. Волк бегает со скоростью* 60 *км/ч. Кроме того, он может нести в зубах одного козлёнка, правда бежит при этом Волк медленнее: со скоростью* 50 *км/ч. Сможет ли Волк при этих условиях за один день похитить всех семерых козлят? Ответ обоснуйте.*

Решение. Способ 1. Очевидно, что время перемещения всех козлят из дома Козы в дом Волка будет наименьшим, если козлята прибудут в дом Волка одновременно. Это значит, что каждого козлёнка волк несёт одно и тоже время, пусть оно равно $1,5x$ часов. Можно считать, что Волк сначала везёт первого козлёнка вперед на $75x$ км. За это время остальные козлята пройдут $9x$ км. Потом Волк бежит обратно до встречи с козлятами — это x часов, за которые Волк вернётся на расстояние $60x$ км; тем временем козлята пройдут еще $6x$ км, то есть всего $15x$ км. Встреча тогда состоится в $15x$ км от дома Козы. Теперь Волк забирает ещё одного козлёнка, несёт его вперёд на расстояние $75x$ км, и т. д. пока не перенесёт последнего, седьмого, козлёнка. В этот момент каждый козлёнок проедет $75x$ км и пробежит сам $6\cdot 15x = 90x$ км, оказавшись на расстоянии $75x + 6\cdot 15x = 165x$ км от дома Козы. Чтобы это был дом Волка, необходимо выполнение равенства $165x = 85$, то есть $x = 85/165$. При этом будет потрачено времени $1,5x+2,5\cdot 6x = 16,5\cdot 85/165 = 8,5$ часов. Козе надо на дорогу $85/340 = 1/4$ часа, и она достигнет дома Волка быстрее, за 8,25 часа.

Способ 2. Забудем до поры про Козу и попробуем найти наименьшее время, за которое Волк сможет доставить козлят к себе домой. Каждый козлёнок будет бежать некоторое время своим ходом, а некоторое — ехать в зубах волка. При этом можно считать, что каждый козлёнок едет одно и тоже время, скажем, t часов. Действительно, если время каких-то двух козлят различно, то время не оптимально: волку выгоднее пораньше отпустить того козлёнка, которого нёс дольше (этот козлёнок прибудет в дом Волка раньше) и за этот счёт подольше нести второго, который прибыл позже.

Итак, каждый козлёнок проехал t часов в зубах Волка, преодолев при этом $50t$ км пути. Остальные $85-50t$ км он бежал сам, и потратил на это $\dfrac{85-50t}{6}$ ч. Общее время его движения составило $t+\dfrac{85-50t}{6}=\dfrac{85-44t}{6}$ ч.

Теперь посмотрим на Волка. Он в течение $7t$ ч переносил козлят, пробежав при этом $350t$ км по направлению от дома Козы к себе домой. Значит $350t-85$ км он должен был пробежать в обратном направлении. Это расстояние он бежит порожняком, значит на это ему необходимо $\dfrac{350t-85}{60}=\dfrac{70t-17}{12}$ ч, и общее время движения Волка составляет $7t+\dfrac{70t-17}{12}=\dfrac{154t-17}{12}$ ч.

Так как время Волка и каждого козлёнка должно быть одинаково (последний козлёнок прибудет к Волку в его зубах), имеем уравнение $\dfrac{85-44t}{6}=\dfrac{154t-17}{12}$, откуда $t=\dfrac{17}{22}$, а общее время движения составит $8,5$ ч.

Самое время вспомнить про Козу. 8 часов она вне дома, ещё ей надо $\dfrac{85}{340}$ ч, чтобы доехать до дома Волка, значит спустя $8,25$ ч она уже будет у дома Волка. За это время все козлята в дом Волка никак не попадут. Похищение, следовательно, Волку не удалось.

Способ 3. Предположим, что Волку удалось переправить всех семерых козлят в свой дом. Тогда каждый козлёнок попал в дом Волка раньше, чем до этого дома добралась Коза. Козе требуется на дорогу $\frac{85}{340}=\frac{1}{4}$ ч, ещё 8 часов она находится вне дома, значит, козлёнок может быть в пути не более $8\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$ ч.

Козлёнок t часов (t у каждого козлёнка может быть своё) едет в зубах волка, проезжает $50t$ км, а остальное $85-50t$ км бежит сам. Таким образом, он тратит на путь $t+\frac{85-50t}{6}=\frac{85-44t}{6}$ ч. Из условия $\frac{85-44t}{6}\leqslant\frac{33}{4}$ находим $t\geqslant\frac{71}{88}$.

Теперь рассмотрим козлёнка, у которого это t — наименьшее. Это значит, что Волк каждого из козлят нёс не менее, чем t ч, и пробежал при этом по направлению от дома Козы к своему дому не менее $50t$ км. Со всеми козлятами в зубах он пробежал, следовательно не менее $7\cdot 50t$ км. Это число, очевидно, больше расстояния между домами Козы и Волка, поэтому Волк не менее, чем $7\cdot 50t-85$ км бежал в обратном направлении, и затратил на это не менее $\frac{7\cdot 50t-85}{60}=\frac{70t-17}{12}$ ч. Общее время движения Волка, таким образом, не меньше, чем $7t+\frac{70t-17}{12}$ ч, с другой стороны, оно не больше, чем $\frac{33}{4}$ ч. Имеем неравенство $7t+\frac{70t-17}{12}\leqslant\frac{33}{4}$, откуда $t\leqslant\frac{58}{77}$.

Сравнивая два полученных неравенства, получаем $\frac{58}{77}\geqslant\frac{71}{88}\Leftrightarrow 464\geqslant 497$, что неверно. Значит, наше предположение привело к противоречию, и Волку похитить всех козлят не удастся.

ОТВЕТ. Не успеет.

10.2 *Назовём расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски наименьшее число ходов, за которое шахматный король может перейти из одной клетки в другую. Отмечено три клетки с попарными расстояниями, равными* 100. *Сколько клеток доски находится на расстоянии* 50 *от каждой этих трех клеток? Ответ обоснуйте.*

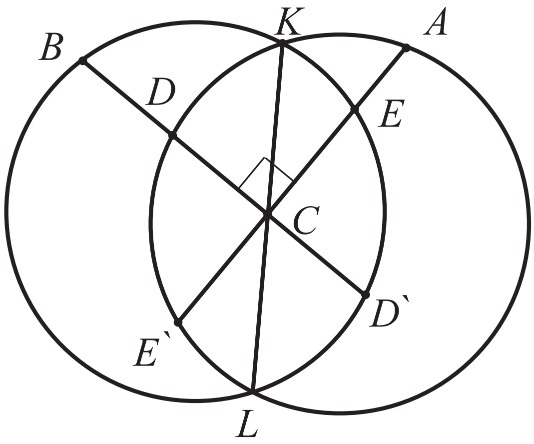
Решение. По условию для любых двух из этих трех клеток A, B, C имеется путь короля, соединяющий эти точки, длины 100. Поскольку этот путь минимально возможный, то между этими точками или 99 горизонталей, или 99 вертикалей. Можно считать, с точностью до переобозначений и поворотов, что для пары точек A, B и для пары точек B, C это 99 вертикалей. Если A, C по разные стороны от вертикали содержащей B, то между A, C — 199 вертикалей, и минимум 200 ходов короля (что невозможно). Следовательно A, C находятся по одну сторону, то есть на общей вертикали, на расстоянии 100 клеток друг от друга. Значит точка, находящаяся на расстоянии 50 от каждой из них, может быть только на одной горизонтали. Точка, находящаяся на расстоянии 50 от A и B (между которыми ровно 99 вертикалей), также может быть только на одной вертикали. Следовательно, искомых точек не более одной.

Покажем, что она обязана быть. Рассмотрим квадрат со стороной AC, противоположная сторона которого на той же вертикали, что и B. Точка B лежит на этой противоположной стороне. Теперь из центра этого квадрата любая точка на границе достигается ровно за 50 ходов. Значит между всеми тремя точками имеются пути длины 100, проходящие через центр. Поскольку они кратчайшие, то центр — искомая точка.

ОТВЕТ. Ровно одна.

10.3 *Две окружности радиуса* 1 *пересекаются в точках K, L. Пусть C — середина KL, а лучи CA, CB образуют прямой угол и пересекают окружности в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на окружности. Верно ли, что эта окружность имеет радиус* 1*? Ответ обоснуйте.*

Решение. Можно считать, что и точка A, и точка B лежат на окружностях (или одной и той же, или на разных), но отрезки AC, BC пересекают другую окружность (эти же окружности) в точках E, D. Все дальнейшее изложение не зависит от того, принадлежат одной окружности точки A, B (D, E) или A, D (B, E). Отразим E, D относительно точки C, получим точки E', D', при этом $CE = CE'$, $CD = CD'$. Из симметрии окружностей относительно точки C, точки E', D' лежат на окружностях, а $CA \cdot CE' = Cl \cdot CK = CB \cdot CD'$. Но тогда и $CA \cdot CE = CB \cdot CD$, то есть все четыре точки лежат на одной окружности.



К решению задачи 10.3

Покажем, что ее радиус равен 1. Прямоугольные треугольники $\triangle CED$, $\triangle CED'$ равны по двум катетам, отсюда

$$\sin\angle ED'B = \sin\angle EDC = \sin(\pi - \angle EDC) = \sin\angle EDB.$$

Поскольку опирающаяся на угол α хорда равна $2R\sin\alpha$, а хорда BE общая, то и радиусы всех окружностей совпадают.

ОТВЕТ. Верно.

10.4 *Гермиона сказала Гарри Поттеру, что может подставить в выражение* $(a_0 + a_1)(a_2 + a_3)\ldots(a_{2018} + a_{2019})$ *все целые числа от* 0 *до* 2019 *(каждое число вместо какого-то* a_i*) так, чтобы это выражение равнялось квадрату какого-то натурального числа. Гарри Поттер в ответ сообщил, что способен аналогичной подстановкой сделать это выражение равным восьмой степени какого-то натурального числа. Подумав пару минут, Рон Уизли заявил, что он готов подставить эти числа так, чтобы всё выражение было равно восемьсот пятьдесят седьмой степени какого-то натурального числа. Не ошибся ли кто-нибудь из них? Ответ обоснуйте.*

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}
(3+0)(1+2)(4+5) &= 3^4, \\
(6+75)(7+74)\cdot\ldots\cdot(40+41) &= \left(3^4\right)^{35} = 3^{140}, \\
(76+167)(77+168)\cdot\ldots\cdot(121+122) &= \left(3^5\right)^{46} = 3^{230}, \\
(168+2019)(169+2018)\cdot\ldots\cdot(1093+1094) &= \left(3^7\right)^{926} = 3^{6482}.
\end{aligned}$$

Перемножая, из $4 + 140 + 230 + 6482 = 6856$ получаем $3^{6856} = \left(3^{857}\right)^8 = \left(3^8\right)^{857}$, что решает все пункты задачи.

Ответ. Нет, не ошибся.

10.5 *Назовём заданную на всей оси функцию* $f(x)$ *красивой, если у уравнения* $f(x) = 0$ *имеется хотя бы три идущих подряд различных корня, образующих арифметическую прогрессию. Назовём функцию* $f(x)$ *модной, если для некоторого действительного* a *функция* $f(x) - a$ *красива.*

а) Докажите, что всякая нечётная функция, имеющая ровно три различных корня, красива.

б) Докажите, что моден всякий многочлен третьей степени, имеющий три различных корня.

в) Верно ли, что функция $\cos(2^{-x})$ *модна?*

г) Верно ли, что моден всякий многочлен, имеющий хотя бы три различных корня?

Ответы обоснуйте.

Решение. а) Отметим, что всякая нечётная функция $f(x)$ имеет корень, равный нулю, например из-за $f(0) = -f(0)$. Поскольку корней у ней конечное число, большее единицы, то найдется ещё один, назовём его q. Тогда симметрично ему, в силу $f(q) = -f(-q) = f(-q)$, найдётся еще один корень $-q$. Вместе с нулём они заведомо образуют арифметическую прогрессию. Осталось отметить, что если взять в качестве q ближайший к нулю корень, мы получаем три корня подряд, что и требуется.

б) Можно считать, что $P(x) = 2x^3 - 6bx^2 + 6cx + d$. Теперь в силу равенств

$$\begin{aligned}2x^3 - 6bx^2 + 6cx + d &= 2(x-b)^3 + 6(c-b^2)x + d + 2b^3 = \\ &= 2(x-b)^3 + 6(c-b^2)(x-b) + 2b^3 + 6b(c-b^2) + d = \\ &= 2(x-b)^3 + 6(c-b^2)(x-b) + P(b),\end{aligned}$$

выполнено $P(x) - P(b) = Q(x-b)$ для функции $Q(x) = 2x^3 + 6(c-b^2)x$. Поскольку функция $Q(x) = 2x^3 + 6(c-b^2)x = P(x+b) - P(b)$ нечётна, то корни уравнения $Q(x) = 0$ симметричны относительно нуля. Тогда и при $a = P(b)$ корни многочлена $P(x) - a = Q(x-b)$ симметричны относительно b, сам b также является его корнем, а весь график $P(x)$ ценральносимметричен относительно точки (b, a). Поскольку ось OX переходит при такой симметрии в $y = 2a$, то многочлен $P(x) - 2a$ также имеет три корня. Следовательно, имеет три корня и многочлен $P(x) - a$. Осталось заметить, что b — уже корень, а остальные симметричны относительно него, таким образом, они все образуют арифметическую прогрессию.

в) Решаем уравнение $\cos(2^{-x}) = 1$, выбираем три последовательных корня, затем начинаем уменьшать правую часть и замечаем, что каждый корень раздвоился, а разность между раздвоенными корнями растёт, тогда как внутренние корни сближаются (до нуля при правой части равной -1). Следовательно, в какой-то момент последняя разность сравняется с одной из боковых, то есть все три (идущих подряд) корня образуют арифметическую прогрессию.

г) Сначала мы фактически подберём такие три отрезка возрастания-убывания, чтобы проходила идея предыдущего доказательства.

Рассмотрим все промежутки возрастания-убывания многочлена. Поскольку он имеет хотя бы три различных корня, то таких промежутка хотя бы три. Для каждого из таких промежутков под его мощностью будем понимать разность максимального и минимального значения функции на этом промежутке (допускается мощность, равная бесконечности). Рассмотрим промежуток с минимальной мощностью, поскольку его мощность не бесконечна, он не крайний, то есть он — отрезок, пусть $[C, E]$, а слева, и справа от него есть другие промежутки монотонности, возможно, бесконечные. Поскольку мощность $[C, E]$ минимальна, найдется ближайший слева от C корень многочлена $P(x) - P(E)$, аналогично найдется ближайший справа к E корень многочлена $P(x) - P(C)$. Обозначим их A, G соответственно. По их выбору мы имеем, что $P(A) = P(E), P(C) = P(G)$, а на промежутках $[A, C]$, $[E, G]$ функция также монотонна.

При необходимости рассматривая многочлен $-P(x)$, можно считать, что $P(A) = P(E) < P(C) = P(G)$. Каждому $a \in [P(A), P(C)]$ соответствует по одному корню многочлена $P(x) - a$ на каждом из промежутков $[A, C]$, $[C, E]$ $[E, G]$, обозначим эти корни через $B(a), D(a), F(a)$. Осталось доказать, что для некоторого a из этого промежутка выполнено $2B(a) = D(a) + F(a)$. Действительно, хорда, соединяющая точки $(B(a), P(B(a)))$ и $(F(a), P(F(a)))$, лежит выше графика при $a = P(C)$, и ниже — при $a = P(A)$. Тогда это же верно и для середин этих хорд. Следовательно, найдётся такое значение $a \in [P(A), P(C)]$, что у соответствующей ему хорды середина попадёт в точности на график, в частности при этом абсцисса этой середины станет корнем многочлена $P(x)-a$. Поскольку эта абсцисса — среднее арифметическое корней $B(a), F(a)$ того же многочлена, то образующие одноименную прогрессию корни найдены.

11 класс

11.1 *Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, отличную от константы, такую, что она не принимает отрицательных значений, и для любого действительного числа t выполняется неравенство $f(\sin t) + f(\cos t) \geqslant 4f(\sin t \cdot \cos t)$.*

Решение. Пусть $f(x) = x^2$. Эта функция неотрицательна и отлична от константы. $f(\sin t) = \sin^2 t$; $f(\cos t) = \cos^2 t$; $f(\sin t \cdot \cos t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 t = \dfrac{1}{4}\sin^2 2t$. Поэтому

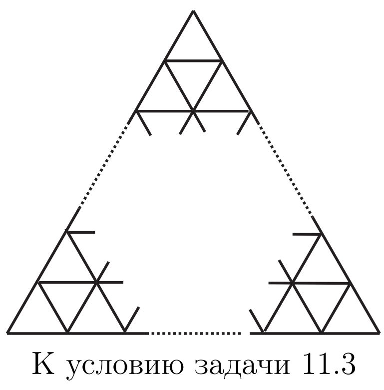
$$f(\sin t) + f(\cos t) = 1 \geqslant \sin^2 2t = 4f(\sin t \cdot \cos t).$$

11.2 *Дан трёхгранный угол. В каждую из его граней вписали по окружности так, что эти окружности попарно касаются друг друга. Докажите, что существует сфера, содержащая все три окружности.*

Решение. Обозначим вершину трёхгранного угла буквой S, точки касания окружностей (они, очевидно лежат на рёбрах угла) буквами A_1, A_2 и A_3 и через каждую точку A_i проведём плоскость перпендикулярно тому ребру, на котором лежит эта точка. Пусть проведённые плоскости пересекаются в точке O. Покажем, что все точки всех трёх окружностей от точки O равноудалены. Этим утверждение задачи будет доказано.

По свойству касательных к окружностям имеем $SA_1 = SA_2 = SA_3$. Треугольники SOA_i прямоугольные (так как $SO \perp A_iO$ по построению), имеют равные катеты и общую гипотенузу. Значит, эти треугольники равны, поэтому равны и вторые их катеты: $A_1O = A_2O = A_3O$. Теперь осталось доказать, что все точки, лежащие на какой-то одной окружности равноудалены от точки O. Без ограничения общности докажем этот факт для окружности, проходящей через точки A_1 и A_2. Пусть Q — центр этой окружности. Нам надо доказать, что прямая QO перпендикулярна плоскости SA_1A_2. Рассмотрим плоскость A_1OQ. Прямая SA_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости: $SA_1 \perp A_1O$ по построению токи O и $SA_1 \perp QA_1$ ввиду свойства касательной к окружности. Значит, прямая SA_1 перпендикулярна всей плоскости A_1OQ и, в частности, прямой QO. Аналогично доказывается, что $SA_2 \perp OQ$. Получили, что прямая QO перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости SA_1A_2, значит, и всей плоскости. Этим доказательство завершено.

11.3 *План дома представляет собой правильный треугольник со стороной* 190 *м. Он разделён перегородками на комнаты в форме треугольника со стороной* 10 *м каждая (всего комнат* 361*) — см. рисунок. Вчера в каждой комнате поселилось по таракану. В ночь на сегодня каждый таракан перебрался через перегородку в одну из соседних комнат (комнаты соседние, если они имеют общую стенку-перегородку). Комната считается захламлённой, если в ней находится более одного таракана. Какое наименьшее количество комнат сегодня может оказаться захламлёнными? Ответ обоснуйте.*



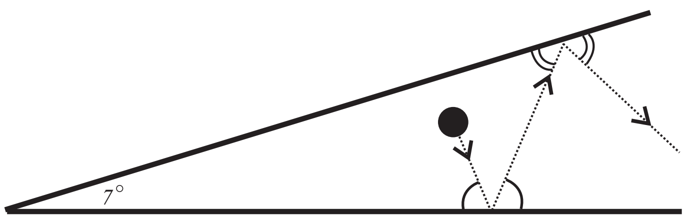
К условию задачи 11.3

Решение. Комнаты делятся на *правильные* (ориентированные также, как и дом) и *неправильные* (ориентированные в обратном направлении). При этом правильных комнат $1+2+\ldots+19=190$, неправильных — $1+2+\ldots+18=171$. Каждый таракан перешёл из правильной комнаты в неправильную или наоборот, из неправильной в правильную. Значит в неправильных комнатах находится на 19 тараканов больше, чем таких комнат. Так как в каждой комнате не может оказаться больше трёх тараканов, эти 19 «лишних» тараканов распределяются не более, чем по 2 таракана на комнату, и «захламляют» не менее 10 комнат.

Пример, когда захламлено ровно 10 комнат: Из неправильных комнат все тараканы двигались в одну сторону (скажем, вверх), а тараканы, в чью комнату они пришли, двигались в обратном направлении. Сейчас количество тараканов во всех комнатах по-прежнему по одному, но надо ещё переместить 19 тараканов из самых нижних комнат. Перемещаем их так: первый таракан (считая слева) перемещается вверх-вправо, второй — вверх влево, так что эти два таракана оказываются в одной комнате (где уже есть третий таракан, пришедший туда сверху) и захламляют её. Аналогично третий таракан идёт вверх-вправо, четвёртый — вверх влево, пятый — вверх-вправо, шестой — вверх влево и так до пары семнадцатый-восемнадцатый таракан. Сейчас захламлено 9 комнат. У девятнадцатого таракана выбора нет, он идёт вверх-влево, захламляя ещё одну комнату.

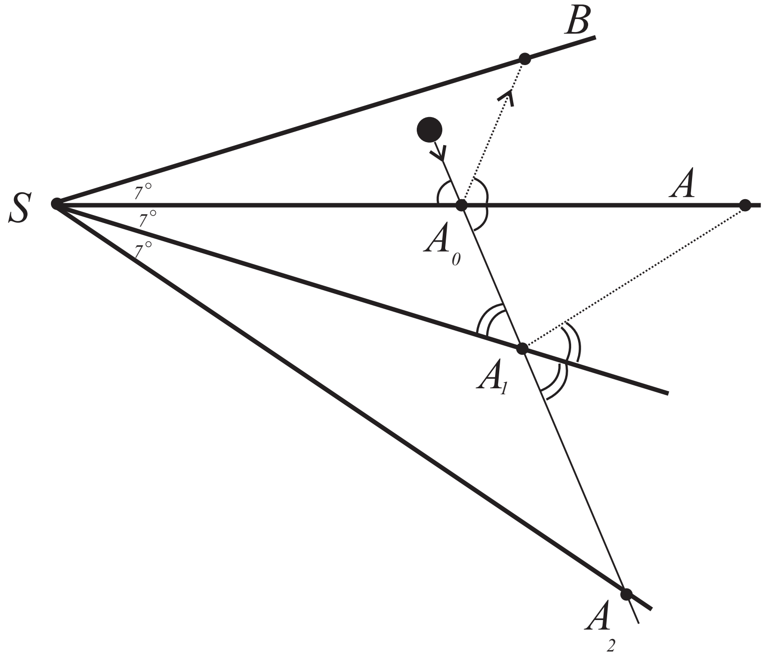
ОТВЕТ: 10 комнат.

11.4 *Два борта бесконечного бильярдного стола пересекаются под углом 7°. На столе лежал шар, который стал двигаться под некоторым углом к борту. Отражение от бортов абсолютно упругое (угол падения равен углу отражения), трение отсутствует. Известно, что в итоге шар отразился от бортов ровно 10 раз — см. рисунок. Определите, сколько раз отразился бы шар от бортов, если бы был выпущен из той же точки, но в противоположном направлении. Ответ обоснуйте.*



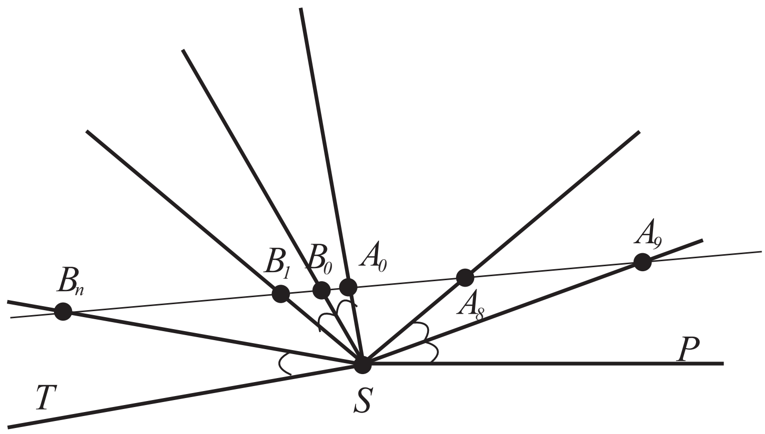
К условию задачи 11.4

Решение. Пусть борты стола — это лучи SA и SB, и пусть первое соударение шара было с бортом SA в точке A_0. Отобразим стол симметрично прямой SA_0. В силу характера движения шара его траектория при этой симметрии «выпрямится» — см. рисунок. Пусть образ второго соударения — точка A_1. Рассмотрим симметрию относительно прямой SA_1 и т. д.



Получим последовательно точки A_2, A_3, …, A_9. А следующего соударения не будет, это означает, что луч A_8A_9 с очередным лучом (обозначим его SP) не пересечётся.

Если шар пустить в обратном направлении, то можно сделать аналогичное построение, начав с симметрии относительно прямой SB. Получим серию точек B_0, B_1, …, B_n. Процесс завершится, как только луч $B_{n-1}B_n$ не пересечёт очередную сторону угла — луч ST. От нас требуется найти число $n+1$.



Заметим, что все точки A_i и B_i лежат на одной прямой l, и эта прямая не проходит через точку S. Борты стола (реальные и полученные в результате многочисленных симметрий) образуют веер лучей с общим началом S; угол между соседними лучами составляет $7°$ ровно. Значит $\angle A_9SB_n = 7° \cdot (n+9)$. Из треугольника A_9SB_n видим, что $\angle A_9SB_n < 180°$, откуда $n < 16\frac{5}{7}$, т. е. $n \leqslant 16$. С другой стороны, $\angle PST \geqslant 180°$, иначе прямая l пересекла бы одну из его сторон. Так как $\angle PST = \angle A_9SB_n + 14° = 7° \cdot (n+11)$, имеем $7° \cdot (n+11) \geqslant 180°$, откуда $n \geqslant 15$. Таким образом, для n допустимы два значения $n = 14$ и $n = 15$. Оба они реализуемы: $n = 14$ получается, например, если прямая l параллельна лучу SP, а $n = 15$ — если прямая l «почти параллельна» лучу SA_9. Соответственно, количество соударений может быть либо 15, либо 16.

ОТВЕТ: Либо 15, либо 16.

11.5 *Пусть проведён однокруговой теннисный турнир среди $n > 1$ участников (т. е. каждый теннисист сыграл один матч с каждым). За победу в матче теннисист* *получает 1 очко, за поражение — 0, а ничьих в теннисе не бывает. Будем называть матч алогичным, если проигравший в матче набрал по итогам всего турнира очков строго больше, чем победивший.*

а) Выберите натуральное число $k \leqslant 4$ и приведите пример турнира, в котором процент алогичных матчей больше или равен $10k$.

б) Покажите, что если n — чётно, то алогичных матчей не может быть больше 75% от общего количества всех матчей.

в) У каждого участника турнира имеется рейтинг, и рейтинги разных теннисистов различны. Назовём матч странным, если оба его участника набрали по итогам турнира одинаковое количество очков, но проигравший имеет более высокий рейтинг, чем выигравший. Приведите пример турнира, в котором количество странных матчей больше, чем 74% от общего количества матчей.

г) Может ли случиться так, что доля алогичных матчей в турнире превысит 50%? Ответы обоснуйте.

Решение. а) Легко убедится, что для того, чтобы был сыгран хотя бы один алогичный матч, требуется, чтобы в турнире было минимум 4 участника. При четырёх участников будет сыграно 6 матчей, из которых алогичным может быть только один (см. таблицу, алогичный результат выделен жирным шрифтом); процент алогичных матчей больше или равен 10 (реализован случай $k = 1$).

участник	1	2	3	4	итого
Первый	$\otimes$	1	**0**	1	2
Второй	0	$\otimes$	1	1	2
Третий	**1**	0	$\otimes$	0	1
Четвёртый	0	0	1	$\otimes$	1

Случай $k = 2$ реализуется уже при 5 участниках — см. таблицу.

участник	1	2	3	4	5	итого
Первый	$\otimes$	1	**0**	1	1	3
Второй	0	$\otimes$	1	1	1	3
Третий	**1**	0	$\otimes$	1	**0**	2
Четвёртый	0	0	0	$\otimes$	1	1
Пятый	0	0	**1**	0	$\otimes$	1

Здесь из десяти матчей алогичных 2. Процент составляет 20 ровно.

Для реализации ситуации $k = 3$ положим $n = 13$. Таблица будет выглядеть очень громоздко, потому опишем результаты словами. Разделим всех участников на 3 группы так, что в группе A и C по 5 человек, в группе B — 3 человека. Пусть при встрече теннисистов из групп A и B всегда побеждает теннисист группы A, при встрече теннисистов из групп B и C — теннисист группы B, а при встрече теннисистов из групп A и всегда побеждает теннисист группы . Кроме того, пусть игрок каждой из групп A и C в матчах внутри своей группы два матча выиграл и два проиграл. Теннисисты группы B в матчах внутри своей группы пусть также выиграли «по циклу». Тогда каждый теннисист группы A набрал $2+3 = 5$ очка, каждый теннисист группы C $5 + 3 = 8$ очков, а теннисисты группы B набрали $5 + 1 = 6$ очков каждый. При этом алогичными матчами будут все матчи теннисистов группы B с теннисистами двух других групп — всего 30 матчей. Общее число матчей равно 78, процент алогичных игр $\frac{5}{13} \cdot 100$ — между 30 и 40 процентами.

Турнир для $k = 4$ строится аналогичным образом, только количество участников должно быть больше. Пусть в группе B ровно $2t + 1$ теннисист, в группах A и C — по $2t + 3$, а матчи закончились также, как и в предыдущем примере. Тогда теннисисты группы A набрали $3t+2$ очка, теннисисты группы C — по $3t + 4$ очка, теннисисты группы B — по $3t + 3$ очка. По-прежнему алогичные игры играли только теннисисты группы B с тенниситами других групп, и таких игр $(2t+1)(4t+6)$. Общее количество матчей $(6t+5)(3t+2)$, доля алогичных игр равна $\frac{(2t+1)(4t+6)}{(6t+7)(3t+3)}$. При больших значениях t она стремится к $\frac{4}{9}$, а уже при $t=2$ превышает 0,4.

Разумеется, пример для больших k годится и для меньших; в частности, последний пример является примером для любого $k \leqslant 4$.

б) Пусть в турнире участвуют $2k$ теннисистов. Тогда общее количество матчей в турнире равно $k(2k-1)$. Упорядочим участников турнира по количеству набранных очков и рассмотрим k лучших. Первый теннисит не мог выиграть ни одного алогичного матча, поскольку его никто не опередил. Второй теннисист мог выиграть максимум один алогичный матч (у первого), третий — максимум два, и так вплоть до k-го, который мог выиграть не более $k-1$ алогичного матча. Итого, рассмотренные k теннисистов могли в сумме выиграть алогичных матчей не более, чем $0+1+\ldots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$. Теперь рассмотрим k оставшихся теннисистов. Они в совокупности выиграли не больше матчей, чем теннисисты первой группы (количество выигранных матчей равно количеству набранных очков, поэтому $k+1$-й выиграл не больше чем первый, $k+2$-й — не больше, чем второй и. т.д.), значит, в сумме они выиграли матчей не больше, чем $\frac{k(2k-1)}{2}$. Ясно, что побед в алогичных матчах они одержали также не больше, чем $\frac{k(2k-1)}{2}$. Так как в каждом алогичном матче победитель только один, общее число алогичных матчей не больше, чем $\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(2k-1)}{2}=\frac{k(3k-2)}{2}$. Значит, процент алогичных матчей не больше, чем $\frac{k(3k-2)}{2k(2k-1)}=\frac{3k-2}{4k-2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4(2k-1)}<0,75$.

в) Пусть в турнире участвует нечётное количество теннисистов $2k+1$, k — натуральное число. Занумеруем их в порядке возрастания их рейтинга. Теперь расставим их по кругу: $-1-2-3-\ldots-2k-(2k+1)-$ по часовой стрелке. Пусть каждый выиграет у k ближайших к нему тенниситов, если двигаться по часовой стрелке и проиграет остальным. Тогда все теннисисты наберут поровну очков (по k) и странных матчей будет столько, сколько побед одержат игроки с меньшим рейтингом. При этом все теннисисты с номерами 1 — $k+1$ одержат по k таких побед, а далее количество странных побед будет уменьшаться на 1 с каждым следующим теннисистом. Всего получим

$$k(k+1)+(k-1)+(k-2)+\ldots+1+0=\frac{k(3k-1}{2}$$

странных матчей. Общее число матчей равно $(2k+1)k$, процент странных игр будет равен $\frac{3k-1}{4k+2}$. При стремлении k в бесконечность эта дробь стремится к 0,75, поэтому при достаточно большом k (можно сосчитать, что при $k \geqslant 75$) оно будет больше, чем $0,74$.

г) Такое может случиться! Мы покажем, что доля алогичных матчей может быть сколь угодно близкой к $0,75$. Для построения примера прежде всего рассмотрим турнир, описанный в пункте в), только пусть в нём играют не теннисисты, а команды теннисистов по m человек в каждой. При этом теннисисты из разных команд сыграли также как их команды, а в матчах внутри своей команды все набрали одинаковое количество очков (это возможно при нечётном m). Заметим, что при этом общее количество матчей имеет порядок $\frac{((2k+1)m)^2}{2}$, количество матчей, сыгранных теннисистами внутри своих команд, имеет порядок $(2k+1)\cdot\frac{m^2}{2}$, поэтому доля таких матчей имеет порядок $\frac{1}{2k+1}$, что при больших k пренебрежимо мало. Также заметим, что матч между теннисистами странный тогда и только тогда, когда в турнире команд странен матч между командами, которые представляют эти теннисисты. Значит, доля странных матчей может быть сколь угодно близка к $0,75$. Теперь небольшими изменениями добьёмся того, чтобы эти странные матчи стали алогичными. Для этого добавим в каждую команду ещё одного теннисиста, назовём его капитаном. Пусть каждый капитан побеждает всех теннисистов команд, рейтинг которых ниже, чем рейтинг его команды, и проигрывает теннисистам, рейтинг команд которых выше. Как он сыграет с участниками своей команды — не существенно, пусть, например, всегда выигрывает. Теперь каждый теннисист, отличный от капитана, наберёт тем больше очков, чем выше рейтинг его команды (он выиграет у большего числа капитанов других команд) и матчи, которые раньше были странными, теперь станут алогичными. Остаётся заметить, что мы добавили всего $2k-1$ теннисиста к $m(2k-1)$ имеющимся, поэтому при достаточно больших m доля добавленных матчей также может быть сделана пренебрежимо малой. Таким образом, доля алогичных матчей по-прежнему будет стремиться к 0,75.