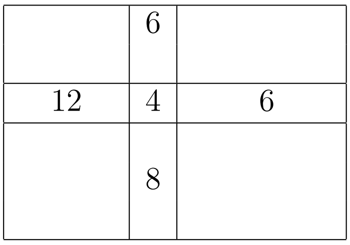
XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

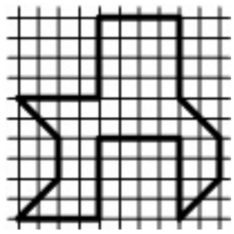
5 класс

5.1 На уроке английского языка группе из 10 пятиклассников дали тест. На каждый из вопросов теста правильно ответили ровно 7 пятиклассников. Известно, что девять учеников ответили правильно каждый на 4 вопроса. Сколько правильных ответов дал десятый ученик? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

5.2 Прямоугольник разделён на 9 меньших прямоугольников. Периметры пяти из них известны — см. рисунок; они записаны внутри «своих» прямоугольников. Чему равен периметр исходного прямоугольника? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 5.2



К условию задачи 5.4

5.3 Назовем число *суммируемым*, если оно представимо в виде суммы восьми различных натуральных чисел, причём единственным (с точностью до перестановки слагаемых) образом. Найдите все суммируемые числа и докажите, что других таких чисел нет.

5.4 Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на две равные части (одинаковые по форме и размеру).

5.5 На окружности красным цветом написали 10 произвольных чисел (не обязательно различных). После этого в каждый из десяти промежутков между соседними красными числами синим цветом записали их разность (из большего вычитали меньшее). Докажите, что все десять синих чисел можно разбить на две группы так, чтобы суммы в этих двух группах совпали.

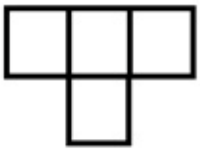
XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

6 класс

6.1 Наблюдатель собирается раздать листочки с текстами олимпиады в двух аудиториях. Количество посадочных мест в них одинаково, в вот количество участников может различаться. Он знает, что всего в этих аудиториях должно быть 150 человек. Когда наблюдатель пересчитал присутствующих, оказалось, что в одной аудитории на 7 участников больше, чем в другой. Докажите, что кто-то всё еще не дошел до своей аудитории.

6.2 Одно натуральное число поделили с остатком на другое. Делимое оканчивается на 1, делитель и частное — на 9. Найдите все возможные цифры, на которые может оканчиваться остаток. Ответ обоснуйте.



К условию задачи 6.3

6.3 У Знайки был большой прямоугольник из фанеры. Однажды Знайка распилил его без остатка на прямоугольники двух видов: 2×3 и 1×4. После этого Незнайка потерял один прямоугольник 1×4 и заменил его «Т-ешкой» (см. рисунок) той же площади, что и потерянный прямоугольник. Докажите, что теперь Знайка не сможет составить из полученных фигурок исходный прямоугольник.

6.4 Петя очень любит математику и вычисляет всё подряд. Например, незадолго до своего дня рождения он подсчитал свой коэффициент радости (КР), и получил, что он равен 62. Формула коэффициента радости, которую использовал Петя, такова: КР $= a - bx$, где x — количество дней до праздника, a и b — некоторые фиксированные положительные числа, не обязательно целые. Известно, что в день рождения коэффициент радости равен 100, а в один из дней того же месяца он равнялся 14. Не ошибся ли Петя при вычислениях? Ответ обоснуйте.

6.5 У Кирилла и Лёши есть 30 карточек. На каждой из карточек есть девять мест для девяти цифр девятизначного числа. Раз в минуту Лёша будет называть одну из двух цифр: 5 или 6, а Кирилл — вписывать названную цифру на любую из карточек в любое из ещё не занятых мест. Так будет продолжаться до тех пор, пока на карточках не будут получены все 30 девятизначных чисел. Лёша хочет, чтобы получилось как можно больше различных чисел, Кирилл — как можно меньше. Сколько различных чисел будет выписано, если оба мальчика действуют наилучшим для себя образом? Ответ обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

7 класс

7.1 У Ани есть бумажный квадрат. Она его согнула по прямой линии, после этого согнула второй и третий раз, также по прямым линиям. После этого Аня взяла иголку и сложенный листок бумаги проткнула насквозь в двух точках, не лежащих на сгибах или краях квадрата. Аня развернула листок и пересчитала полученные дырки в квадрате. Могло ли у неё получиться ровно 13 дырок? Ответ обоснуйте.

7.2 20 мальчиков и 19 девочек пришли на новогодний утренник. Когда все дети встали в хоровод вокруг ёлки, Дед Мороз заметил, что x мальчиков стоят подряд и сообщил об этом Снегурочке. Тогда Снегурочка (она не видит в каком порядке стоят дети в хороводе) сделала абсолютно правильный вывод, что какие-то три девочки тоже стоят подряд. Какое наименьшее возможное значение числа x? Ответ обоснуйте.

7.3 Вдоль прямолинейной дороги расположены 10 деревень: Первая, Вторая, Третья, ..., Десятая (именно в таком порядке), причём количество жителей в каждой деревне соответствует её названию: в Первой живёт один житель, во Второй — два и. т. д. Расстояния между соседними деревнями могут различаться. В одной из деревень необходимо открыть почтовое отделение, при этом суммарное расстояние, которое необходимо пройти всем жителям всех деревень, чтобы добраться до почты, должно быть минимальным. В какой деревне должно появиться отделение? Ответ обоснуйте.

7.4 Шахматную доску (квадрат 8×8) разрезали на доминошки, т. е. на прямоугольники 1×2. В каждой горизонтальной доминошке записали номер строки, в которой она стоит, а в каждой вертикальной — номер столбца, в котором она стоит. Докажите, что сумма всех записанных чисел чётна.

7.5 Дано некоторое натуральное число N. Докажите, что в его десятичной записи можно вычеркнуть несколько цифр (возможно, ни одной) так, чтобы оставшееся число делилось на 7 без остатка, если:

а) число N — сорокатрёхзначное; (3 балла)

б) число N — тридцатитрёхзначное; (3 балла)

в) число N — двадцатитрёхзначное; (3 балла)

г) число N — тринадцатизначное. (5 баллов)

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

8 класс

8.1 Мама дала двум братьям 100 конфет. Младший возмутился: «Как же так, у меня конфет не более половины того количества, что есть у тебя!» Старший ответил: «Ты прав. Ну что ж, я поделюсь с тобой, но отдам тебе не более четверти своих конфет.» Старший брат сдержал свое слово. Могло ли после этого у братьев оказаться одинаковое число конфет? Ответ обоснуйте.

8.2 Расположите на плоскости четыре точки A, B, C, D так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была в два раза меньше площади четырехугольника $ADBC$. (Обратите внимание, что не любая замкнутая четырёхзвенная ломаная является четырехугольником).

8.3 Даны четыре действительных числа x, y, z, k, причём $x \neq y$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, и выполняется соотношение: $\dfrac{yz - x^2}{1 - x} = \dfrac{xz - y^2}{1 - y} = k$. Выразите значение суммы $x + y + z$ через k.

8.4 На шахматной доске (размером 8×8) отмечены 9 клеток: на пересечениях 1-й, 4-й и 7-й горизонталей с 1-й, 4-й и 7-й вертикалями. У Пети и Васи есть 32 бумажных прямоугольника 1×2. Одним таким прямоугольником разрешено покрыть в точности 2 соседние клетки доски. Петя взял 9 прямоугольников и накрыл ими отмеченные клетки. Всегда ли Вася сможет покрыть прямоугольниками оставшуюся часть доски?

8.5 По кругу расставлены натуральные числа от 1 до $2N$, каждое по одному разу. Для каждой пары соседних чисел вычислили их положительную разность, вычтя из большего числа меньшее.

а) Может ли при каком-нибудь значении N сумма всех $2N$ разностей равняться 2019? (2 балла)

б) Какое наименьшее значение может иметь сумма этих $2N$ разностей? (2 балла)

в) Какое наибольшее значение может иметь сумма этих $2N$ разностей? (5 баллов)

г) Найдите все возможные значения суммы этих $2N$ разностей. (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

9 класс

9.1 Найдите все двузначные числа (и докажите, что других нет), обладающие свойством: куб суммы цифр числа равен квадрату самого числа.

9.2 Сказочная шахматная фигура Лягушка каждым своим ходом прыгает либо по вертикали либо по горизонтали. Каждый её прыжок либо короткий (ровно через одну клетку), либо длинный (ровно через две клетки); при этом длины прыжков всегда чередуются. За какое наименьшее число ходов Лягушка может попасть из правой нижней в левую верхнюю клетку стандартной шахматной доски (размера 8×8 клеток)? Ответ обоснуйте.

9.3 Про положительные числа a, b, c известно, что $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{2}{a+b+c}=1$. Докажите, что $abc \geqslant 8$.

9.4 В Вашем распоряжении имеется бесконечный плоский лист бумаги, острый карандаш и два инструмента:

1) *Линейка*, по любым двум точкам позволяющая построить прямую, проходящую через них;

2) *Д-циркуль*, по любым двум точкам A, B позволяющий построить окружность с диаметром AB.

Покажите, как с помощью этого набора инструментов решить следующие задачи:

а) Построить перпендикуляр к заданной прямой l , проходящий через заданную точку M. (3 балла)

б) Для заданных точек X и Y $(X \neq Y)$ построить окружность с центром в точке X, проходящую через точку Y. (4 балла)

9.5 Художник имеет карандаши 2019 разных цветов. Он желает выбрать натуральное число n и раскрасить все целые числа от 1 до n (каждое в свой цвет) таким образом, чтобы никакое число по цвету не совпало ни с каким из своих собственных (т. е. не равных ему самому) делителей. Такую раскраску он называет *корректной.*

а) Найдите наименьшее натуральное число n, при котором корректной раскраски не существует. (2 балла)

б) Какое наибольшее количество чисел может оказаться одинакового цвета при $n = 2018$? (3 балла)

в) Для фиксированного числа n назовём числа a и b $(1 \leqslant a < b \leqslant n)$ *близнецами*, если корректные раскраски набора чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ существуют, и при каждой из них числа a и b имеют одинаковый цвет. Докажите, что при некотором n существует не менее 1000 пар близнецов. (4 балла)

г) Для каждого натурального числа n художник обозначил через $K(n)$ количество корректных раскрасок набора чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Существует ли такое натуральное число $n > 2$, для которого $0 < K(n) < K(n-1)$? (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

10 класс

10.1 Волк хочет забрать у Козы всех её семерых козлят. Сделать он этом может только в отсутствие Козы. В такой ситуации козлята безоговорочно подчиняются Волку. Волку известно, что Коза отсутствует дома каждый день ровно с 10 до 18 часов. Волк знает также, что придя домой и обнаружив отсутствие козлят, Коза бросится в погоню на своём скоростном автомобиле Феррари и если успеет догнать какого-нибудь козлёнка — то больше ни за что Волку его не отдаст. Правда, если козлёнок будет в доме Волка, то Коза уже ничего не сможет сделать.

Расстояние между домами Волка и Козы 85 км. Козлёнок бегает со скоростью 6 км/ч; Феррари Козы развивает скорость до 340 км/ч. Волк бегает со скоростью 60 км/ч. Кроме того, он может нести в зубах одного козлёнка, правда бежит при этом Волк медленнее: со скоростью 50 км/ч. Сможет ли Волк при этих условиях за один день похитить всех семерых козлят? Ответ обоснуйте.

10.2 Назовём расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски наименьшее число ходов, за которое шахматный король может перейти из одной клетки в другую. Отмечено три клетки с попарными расстояниями, равными 100. Сколько клеток доски находится на расстоянии 50 от каждой этих трех клеток? Ответ обоснуйте.

10.3 Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках K, L. Пусть C — середина KL, а лучи CA, CB образуют прямой угол и пересекают окружности в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на окружности. Верно ли, что эта окружность имеет радиус 1? Ответ обоснуйте.

10.4 Гермиона сказала Гарри Поттеру, что может подставить в выражение $(a_0 + a_1)(a_2 + a_3)\dots(a_{2018}+a_{2019})$ все целые числа от 0 до 2019 (каждое число вместо какого-то a_i) так, чтобы это выражение равнялось квадрату какого-то натурального числа. Гарри Поттер в ответ сообщил, что способен аналогичной подстановкой сделать это выражение равным восьмой степени какого-то натурального числа. Подумав пару минут, Рон Уизли заявил, что он готов подставить эти числа так, чтобы всё выражение было равно восемьсот пятьдесят седьмой степени какого-то натурального числа. Не ошибся ли кто-нибудь из них? Ответ обоснуйте.

10.5 Назовём заданную на всей оси функцию $f(x)$ *красивой*, если у уравнения $f(x) = 0$ имеется три идущих подряд различных корня, образующих арифметическую прогрессию. Назовём функцию $f(x)$ *модной*, если для некоторого действительного a функция $f(x) - a$ красива.

а) Докажите, что всякая нечётная функция, имеющая ровно три различных корня, красива. (2 балла)

б) Докажите, что моден всякий многочлен третьей степени, имеющий три различных корня. (4 балла)

в) Верно ли, что функция $\cos(2^{-x})$ модна? (4 балла)

г) Верно ли, что моден всякий многочлен, имеющий хотя бы три различных корня? (4 балла)

Ответы обоснуйте.

XVIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

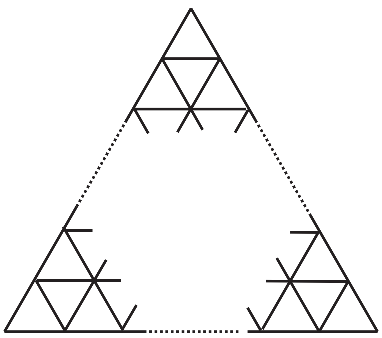
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2019

11 класс

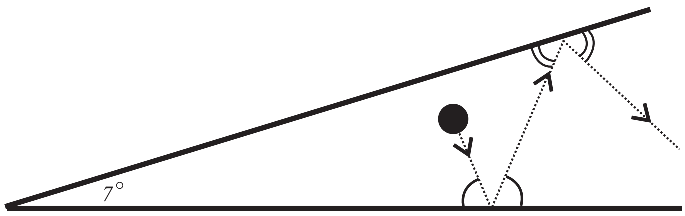
11.1 Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, отличную от константы, такую, что она не принимает отрицательных значений, и для любого действительного числа t выполняется неравенство $f(\sin t) + f(\cos t) \geqslant 4f(\sin t \cdot \cos t)$.

11.2 Дан трёхгранный угол. В каждую из его граней вписали по окружности так, что эти окружности попарно касаются друг друга. Докажите, что существует сфера, содержащая все три окружности.

11.3 План дома представляет собой правильный треугольник со стороной 190 м. Дом разделён перегородками на комнаты в форме треугольника со стороной 10 м каждая (всего комнат 361) — см. рисунок. Вчера в каждой комнате поселилось по таракану. В ночь на сегодня каждый таракан перебрался через перегородку в одну из соседних комнат (комнаты соседние, если они имеют общую стенку-перегородку). Комната считается захламлённой, если в ней находится более одного таракана. Какое наименьшее количество комнат сегодня может оказаться захламлёнными? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 11.3



К условию задачи 11.4

11.4 Два борта бесконечного бильярдного стола пересекаются под углом 7°. На столе лежал шар, который стал двигаться под некоторым углом к борту — см. рисунок. Отражение от бортов абсолютно упругое (угол падения равен углу отражения), трение отсутствует. Известно, что в итоге шар отразился от бортов ровно 10 раз. Определите, сколько раз отразился бы шар от бортов, если бы был выпущен из той же точки, но в противоположном направлении. Ответ обоснуйте.

11.5 Пусть проведён однокруговой теннисный турнир среди $n > 1$ участников (т. е. каждый теннисист сыграл один матч с каждым). За победу в матче теннисист получает 1 очко, за поражение — 0, а ничьих в теннисе не бывает. Будем называть матч *алогичным*, если проигравший в матче набрал по итогам всего турнира очков строго больше, чем победивший.

а) Выберите натуральное число $k \leqslant 4$ и приведите пример турнира, в котором процент алогичных матчей больше или равен $10k$. (k баллов)

б) Покажите, что если n — чётно, то алогичных матчей не может быть больше 75% от общего количества всех матчей. (4 балла)

в) У каждого участника турнира имеется рейтинг, и рейтинги разных теннисистов различны. Назовём матч *странным*, если оба его участника набрали по итогам турнира одинаковое количество очков, но проигравший имеет более высокий рейтинг, чем выигравший. Приведите пример турнира, в котором количество странных матчей больше, чем 74% от общего количества матчей. (2 балла)

г) Может ли случиться так, что доля алогичных матчей в турнире превысит 50%? Ответы обоснуйте. (4 балла)