XIX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

2020 г., 08 — 09 февраля
г. Екатеринбург,
Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

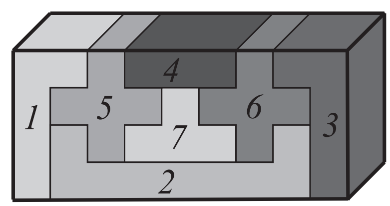
Условия задач

5 КЛАСС

5.1 На доске написано число. Первоклассник Максим сказал, что оно не больше 2020, первоклассник Валерий сказал, что оно не меньше 2020, а первоклассница Ангелина сказала, что оно равно 2020. Сколько среди этих высказываний могло быть верных? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

5.2 Отрезок разбили на 5 равных меньших отрезков. В каждом из маленьких отрезков отметили по точке и занумеровали точки последовательно (слева направо): A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Выяснилось, что расстояние между точками A_1 и A_2 равно 1 см, а расстояние между точками A_2 и A_3 равно 3 см. Может ли расстояние между точками A_4 и A_5 оказаться равным 10 см? Ответ обоснуйте.

5.3 Юный строитель Стёпа желает выложить стенку из 7 деталей конструктора, как указано на рисунке. Детали он опускает последовательно, каждую строго вертикально, и после установки уже не сдвигает. Сколько существует разных допустимых последовательностей взятия деталей для выкладывания стенки? Ответ обоснуйте. (Все детали, даже те, которые имеют одинаковую форму, разного цвета, а значит — различны.)

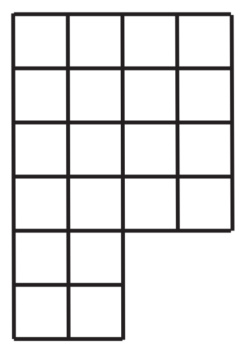


К условию задачи 5.3

5.4 Бумажная фигура состоит из 20 клеток (см. рисунок). Покажите, как

а) отрезать от данной фигуры 2 равных треугольника и переложить их так, чтобы получить квадрат. (3 балла)

б) отрезать от данной фигуры 3 равных треугольника и переложить их так, чтобы получить прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. (4 балла)



К условию задачи 5.4

5.5 Андрей выписал все натуральные числа, меньшие 2020, которые не делятся на 3 и не делятся на 5. Отличница Лиза решила посчитать произведение всех этих чисел. На какую цифру окончится результат, полученный Лизой, если она не ошибётся? Ответ обоснуйте.

6 КЛАСС

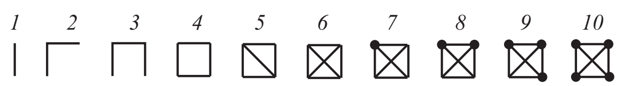
6.1 Кирилл, Дмитрий, Даниил и Павел родились в один день, 8 марта. Если из возраста Кирилла вычесть возраст Дмитрия, добавить возраст Даниила и вычесть возраст Павла, то получится 6. Сколько получится, если из года рождения Кирилла вычесть год рождения Павла, добавить год рождения Даниила и вычесть год рождения Дмитрия? Ответ обоснуйте.

6.2 Буратино выбрал три последовательных натуральных числа. Для каждого выбранного числа он посчитал сумму его цифр и полученные три суммы перемножил. Произведение получилось равным 2020. Докажите, что Буратино ошибся в вычислениях.

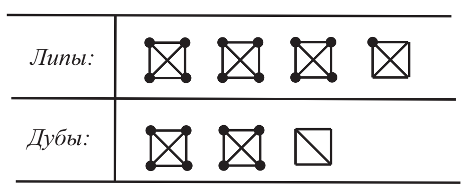
6.3 По кругу сидят 10 толстяков, все разные по толщине. Повар Пётр выбрал каких-то трёх толстяков, сидящих подряд, и дал самому тощему стейк. Повар Василий тоже выбрал каких-то трёх толстяков, сидящих подряд, и дал самому толстому стейк. Наконец, повар Михаил выбрал 5 толстяков, сидящих через одного, и дал по стейку самому тощему и самому толстому из них. Докажите, что ни один толстяк не получил больше двух стейков.

6.4 Разрежьте квадрат 1×1 дм^2 на 7 прямоугольников периметра 2 дм.

6.5 Лесник при подсчёте количества деревьев вместо чисел рисует в блокноте «отрезки» или «кружочки» (каждый символ соответствует одному дереву), используя следующие обозначения для чисел:



При этом деревья разных видов подсчитываются отдельно и записываются в разные строчки блокнота. Например, если лесник насчитает 37 лип и 25 дубов, то у него в блокноте будет нарисовано вот так:



Известно, что на лесном участке всего 2020 деревьев. Лесник, пересчитав их, использовал 1230 «отрезков» и 790 «кружочков». Какое наименьшее количество видов деревьев могло быть на этом участке? Ответ обоснуйте.

7 КЛАСС

7.1. Две бригады рабочих, A и Б, строили стратегический объект. Каждая бригада работает со своей постоянной скоростью: бригада A может справиться со строительством за 12 дней работы, а бригада Б — за 36 дней. На самом деле бригада Б приступила к работе на 4 дня позже бригады A, да ещё и отдыхала по одному дню через каждые два дня работы. Бригада A ушла в отпуск одновременно с первым выходным бригады Б и больше не возвращалась. За сколько дней (с учётом выходных) был построен стратегический объект? Ответ обоснуйте.

7.2. Коля хотел перемножить все натуральные числа от 1 до своего возраста включительно, но по невнимательности пропустил два числа. У него получилось 1 900 800. Сколько лет Коле? (Укажите все возможности и докажите, что других нет).

7.3. По кругу стоят 2020 натуральных чисел. Известно, что сумма любых трёх стоящих подряд чисел равна сумме следующих за ними по часовой стрелке трёх стоящих подряд чисел. Одно из чисел равно 2020. Какие значения могут принимать числа, стоящие рядом с ним справа и слева? Ответ обоснуйте.

7.4. У Пети есть бумажный треугольник. Он может согнуть его дважды, каждый раз вдоль некоторой прямой линии. Ему необходимо получить многоугольник (возможно невыпуклый), для каждой стороны которого найдётся параллельная ей другая сторона. Всегда ли Петя может этого добиться? Ответ обоснуйте.

7.5 Школьники написали несколько контрольных работ, оценки за которые могут принимать значения 1, 2, 3, 4, 5. Известно, что никакие два школьника не написали контрольные одинаково (т. е. хотя бы за одну из контрольных их оценки различаются). Будем говорить, что один школьник *успешнее* другого, если на каждой контрольной он получил оценку выше другого (оценки за разные контрольные не сравниваются).

а) Школьники написали две контрольные работы. Может ли оказаться так, что среди 9 школьников нет двоих, один из которых успешнее другого? (1 балл)

б) Докажите, что если контрольных работ было две, то среди любых 10 школьников всегда найдутся найдутся двое, один из которых успешнее другого. (4 балла)

в) Докажите, что если контрольных работ было две, то среди любых 17 школьников всегда найдутся трое таких, что один из них успешнее второго, а второй — третьего. (4 балла)

г) Пусть школьники написали три контрольные работы. При каком наименьшем количестве школьников можно утверждать, что наверняка найдутся двое, один из которых успешнее другого? (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

8 КЛАСС

8.1 Числа x, y удовлетворяют равенствам

$$x + 4 = (y - 2)^2, \qquad y + 4 = (x - 2)^2.$$

Какие значения может принимать выражение $x^2 + y^2$? Ответ обоснуйте.

8.2 На доске были написаны четыре положительных числа. Максим подошёл к доске и написал на ней пятое число, равное сумме всех четырёх имеющихся. После этого к доске подошёл Антон и написал шестое число — сумму всех пяти чисел, написанных ранее. Оказалось, что полученные шесть чисел можно разбить на 3 пары так, что в каждой паре одно из чисел будет в 4 раза больше другого. Во сколько раз сейчас (т. е. после действий Антона) наибольшее число на доске больше наименьшего числа? Ответ обоснуйте.

8.3 Пусть L — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Точки M и N — середины отрезков AL и BL соответственно. Известно, что расстояние от точки M до стороны BC равно расстоянию от точки N до стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

8.4 В каждой клетке доски размера 2020 клеток $\times$ 2020 клеток лежит по монете. *Ходом* в клетку X называется операция переворачивания всех монет в клетках, стоящих в одной строке или одном столбце с клеткой X (включая и саму X). *Комбинацией* называется следующая операция: вначале отмечаются все клетки доски, в которых монета лежит орлом вверх, а затем делается по ходу в каждую отмеченную клетку. Докажите, что как бы ни лежали монеты в клетках доски первоначально, после последовательного осуществления двух комбинаций все монеты будут лежать вверх решкой.

8.5 На окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 18 синих точек. Какое наибольшее количество точек можно перекрасить в красный цвет так, чтобы не появилось ни одного

а) равностороннего треугольника, (3 балла)

б) прямоугольного треугольника, (4 балла)

в) равнобедренного треугольника, (7 баллов)

все вершины которого находятся в красных точках? Ответы обоснуйте.

9 КЛАСС

9.1 Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n. Функция $f(n)$ для каждого натурального n удовлетворяет равенству $f(n) = n \cdot s(n)$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots f(206)\ldots))}_{2020 \text{ раз}}$. Ответ обоснуйте.

9.2 На доске нарисован треугольник ABC. Биссектрисы углов треугольника ABC вторично пересекли его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Затем с доски стёрли всё, кроме точек A_1, B_1, C_1. С помощью циркуля и линейки восстановите исходный треугольник.

9.3 *Ключом* четырёхзначного натурального числа $\overline{abcd}$ назовём набор из пяти чисел $a+b, b+c, c+d, a+b+c$ и $b+c+d$, упорядоченный по неубыванию. (Например, для числа 4233 ключом является такая последовательность: 5, 6, 6, 8, 9.) Четырёхзначное число назовём *исключительным*, если никакое другое не имеет такой же ключ. Найдите количество исключительных четырёхзначных чисел. Ответ обоснуйте.

9.4 Пусть $0 \leqslant x \leqslant n$, где n — произвольное натуральное число. Докажите неравенство $|x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)| \leqslant \dfrac{n!}{4}$.

9.5 На окружности стоят n белых точек. Красный и Синий играют в следующую игру. На своем ходе игрок выбирает любую белую точку и красит её: Красный в красный цвет, а Синий — в синий. Ходят по очереди, до тех пор, пока все белые точки не окажутся окрашеными. После этого считают количество разноцветных пар соседних точек. Если оно больше $\dfrac{n}{2}$, побеждает Красный, если меньше $\dfrac{n}{2}$ — Синий, а если равно $\dfrac{n}{2}$, то результат игры — ничья. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если:

а) $n = 4$, начинает Красный? (1 балл)
б) $n = 1234$, начинает Синий? (5 баллов)
в) $n = 1234$, начинает Красный? (5 баллов)
г) $n = 1235$, начинает Красный? (3 балла)

Ответы обоснуйте.

10 КЛАСС

10.1 Натуральное число n таково, что любой многочлен степени n, удовлетворяющий одновременно равенствам $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$, удовлетворяет также и равенству $P(3) = P(-3)$. Найдите все такие числа n.

10.2 В окружность вписан двенадцатиугольник, длины сторон которого (в сантиметрах) последовательно равны 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2. Найдите радиус этой окружности.

10.3 Комплект кораблей для игры в «морской бой» состоит из одного линкора (прямоугольника 1×4), двух крейсеров (прямоугольников 1×3), трёх эсминцев (прямоугольников 1×2) и четырёх катеров (квадратов 1×1). Можно ли разместить два комплекта кораблей (любые два корабля не должны иметь общих точек)

а) в прямоугольнике 9×11 клеток; (2 балла)

б) в квадрате 10×10 клеток? (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

10.4 Найдите натуральное число n, удовлетворяющее двойному неравенству

$$n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{1\,000\,000}} < n + 1.$$

10.5 Над плоскостью порхают n светлячков ($n > 2$), занумерованных натуральными числами от 1 до n. Время от времени светлячки на эту плоскость садятся. Известно, что если на плоскости одновременно оказываются светлячки с номерами i и j, то расстояние между ними в этот момент составляет в точности $d_{i,j}$, где $d_{i,j} = d_{j,i}$ — некоторое вещественное положительное число, своё для каждой пары светлячков.

Пусть k — некоторое натуральное число. Существуют ли такое натуральное число $n > k$ и такие положительные числа $d_{i,j}$ ($1 \leqslant i < j \leqslant n$), что любые k или менее светлячков могут сесть на плоскость одновременно, а все n светлячков этого сделать не могут. Решите задачу в случае:

(а) $k = 2$; (1 балл)

(б) $k = 3$; (2 балла)

(в) $k = 4$; (6 баллов)

(г) $k = 5$. (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

11 КЛАСС

11.1 Андрей выписал все натуральные числа, меньшие 2020, среди которых нет чисел делящихся на 3 и нет чисел делящихся на 5. Отличница Лиза решила посчитать произведение всех этих чисел. На какую цифру окончится результат, полученный Лизой, если она не ошибётся? Ответ обоснуйте.

11.2 В правильный тетраэдр вписали шар объёма 1. В каждый из четырёх трёхгранных углов пирамиды вписали по меньшему шару, касающемуся исходного. В каждый из четырёх трёхгранных углов снова вписали по ещё меньшему шару, каждый из которых снова касается ближайшего к нему шара. Так повторили бесконечное число раз. Найдите сумму объёмов всех вписанных шаров. Ответ обоснуйте.

11.3 Функция $f(x)$ определена для всех положительных рациональных чисел и удовлетворяет тождеству $f(xy) \equiv f(x) + f(y)$. Известно, что $f(1/2020) = 1$. Найдите

а) $f(2020)$; (2 балла)

б) $f(2019)$. (5 баллов)

11.4 Лицевая сторона плоскости — белая, а её изнанка — чёрная. Из плоскости вырезали треугольный лоскут ABC. Можно ли разрезать этот треугольник на не более чем три части, каждую перевернуть и так вшить изнаночной стороной наружу, чтобы получить на исходной белой плоскости чёрный треугольник ABC? Решите задачу для

а) прямоугольного треугольника; (1 балл)

б) остроугольного треугольника; (2 балла)

в) произвольного треугольника. (4 балла)

11.5 Единичкин и Десяткин при помощи Арбитра играют в следующую игру. У Арбитра имеется 9 карточек с цифрами 1, 2, ..., 9. Арбитр делит все карточки на две (непустые) кучки и дает их игрокам: Десяткину и Единичкину. Затем каждый из игроков, посмотрев свои карточки, убирает какие-то из них. При этом игрок обязан оставить хотя бы одну карточку в своей кучке и имеет право не убирать ни одной. После этого Арбитр наудачу, не глядя, выбирает по одной оставшейся карточке из кучек Единичкина и Десяткина. Цифра с выбранной карточки из кучки Десяткина ставится в разряд десятков, из кучки Единичкина — в разряд единиц. Десяткин выигрывает, если так полученное двузначное число — простое, иначе выигрывает Единичкин.

а) Докажите, что если Единичкину выдано карточек больше, чем Десяткину, то он может гарантировать себе выигрыш (то есть он выигрывает вне зависимости от действий противника и случая: выбранной Арбитром пары карточек). (1 балл)

б) Известно, что Единичкину выданы такие три карточки, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш. Какие у него карточки? Приведите все возможные варианты и докажите, что нет других. (2 балла)

в) В условиях пункта б) докажите, что Десяткин может играть так, что, как бы не играл соперник, вероятность выигрыша Десяткина будет не меньше $0,5$. (3 балла)

г) В условиях пункта б) докажите, что Единичкин может играть так, что, как бы не играл соперник, вероятность выигрыша Единичкина будет не меньше $0,5$. (3 балла)

д) Известно, что Единичкину выданы такие четыре карточки, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш. Может ли хотя бы один из игроков обеспечить себе (вне зависимости от действий соперника) вероятность выигрыша больше $0,5$?
Ответ обоснуйте. (5 баллов)