Вузовско-академическая олимпиада
2020 — 2021 уч. год

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

11 класс

11.1. На доске написано число 7. За ход разрешается либо умножить число, написанное на доске, на 7, либо стереть любую цифру числа. Можно ли за конечное число ходов получить на доске число 77? Ответ обоснуйте.

11.2. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60 процентов, серые — 30 процентов, а белые — 10 процентов от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истреблённых им белых ворон составляет 120 процентов от количества истреблённых серых и 30 процентов от количества истреблённых черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело две трети всех белых ворон и не более 150 черных? Ответ обоснуйте.

11.3. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AC = CB)$; CH — его высота. Построена окружность с центром в вершине C, радиус которой меньше CH; из точек A и B к окружности проведены касательные AP и BQ так, что точки касания P и Q расположены по одну сторону от прямой CH. Докажите, что точки H, P, и Q лежат на одной прямой.

11.4. На изначально пустую шахматной доску (размером 8×8 клеток) Вася хочет поставить несколько пешек и несколько ладей так, чтобы ни одна ладья не оказалась под боем другой ладьи (через пешки ладья не «прыгает»). И пешек, и ладей у Васи неограничено, кроме того, Вася может оставить какие-то поля доски пустыми. За расстановку Вася получит премию, величина которой (в рублях) равна количеству ладей в расстановке минус количество пешек в ней же. Какова максимальная премия, которую может получить Вася? Ответ обоснуйте.

11.5. Задача Шлемильха (1823-1901). Кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет три различных корня, про которые известно, что они составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Решите уравнение.

б) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c.

10 класс

10.1. На доске написано число 7. За ход разрешается либо умножить число, написанное на доске, на 7, либо стереть любую цифру числа. Можно ли за конечное число ходов получить на доске число 77? Ответ обоснуйте.

10.2. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60 процентов, серые — 30 процентов, а белые — 10 процентов от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истреблённых им белых ворон составляет 120 процентов от количества истреблённых серых и 30 процентов от количества истреблённых черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело две трети всех белых ворон и не более 150 черных? Ответ обоснуйте.

10.3. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AC = CB)$; CH — его высота. Построена окружность с центром в вершине C, радиус которой меньше CH; из точек A и B к окружности проведены касательные AP и BQ так, что точки касания P и Q расположены по одну сторону от прямой CH. Докажите, что точки H, P, и Q лежат на одной прямой.

10.4. На изначально пустую шахматной доску (размером 8×8 клеток) Вася хочет поставить несколько пешек и несколько ладей так, чтобы ни одна ладья не оказалась под боем другой ладьи (через пешки ладья не «прыгает»). И пешек, и ладей у Васи неограничено, кроме того, Вася может оставить какие-то поля доски пустыми. За расстановку Вася получит премию, величина которой (в рублях) равна количеству ладей в расстановке минус количество пешек в ней же. Какова максимальная премия, которую может получить Вася? Ответ обоснуйте.

10.5. Задача Шлемильха (1823-1901). Кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет три различных корня, про которые известно, что они составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Решите уравнение.

б) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c.

9 класс

9.1. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ такова, что $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$ и $f(3) < -4$. Определите знак числа a. Ответ обоснуйте.

9.2. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла C пересекла сторону AB в точке D. Оказалось, что длины отрезков CD и DB равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC (в градусах). Ответ обоснуйте.

9.3. В детской книжке три сказки. Каждая сказка начинается на новой странице, сразу после окончания предыдущей. Первая сказка начинается на первой странице книги, третья сказка заканчивается на последней. Оказалось, что для нумерации страниц, занимаемых каждой из трёх сказок, потребовалось одинаковое количество цифр. Какое наименьшее количество страниц может быть в книге, если известно, что на одиннадцатой странице художник изобразил Иванушку-дурачка? Ответ обоснуйте.

9.4. Правильный треугольник со стороной n (n — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на n равных фигур, каждая из которых состоит из n единичных треугольников. Докажите, что n нацело делится на 4.

9.5. Неравенство Швейцера. Для любых положительных чисел a, b, m, M таких, что $a, b \in [m;\ M]$ докажите неравенство:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{mM}.$$

8 класс

8.1. В австралийском зоопарке 35% всех кенгуру серые, а 13% всех животных зоопарка — кенгуру, но не серые. Сколько процентов от общего числа всех животных зоопарка составляют кенгуру? Ответ обоснуйте.

8.2. Имеется набор шахматных фигур, состоящий из ферзя, двух ладей, двух коней и двух слонов. Их пронумеровали числами от 1 до 7 и расставили на шахматной доске так, что фигура 1 бьёт только фигуру 2, фигура 2 бьёт только фигуру 3, ..., фигура 7 бьёт только фигуру 1. Приведите пример такой расстановки.

8.3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB отметим точки K и N так, что $AK = KN = BN$. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника ABC равна периметру треугольника CMN.

8.4. Мальвина написала на доске натуральное число. Буратино зачем-то умножил его на 8 и получил число, больше 992 000 000, но меньше 1 000 000 000. А Пьеро разделил число Мальвины на 27 и обнаружил, что остаток от деления равен 18. Докажите, что в числе Мальвины можно поменять местами какие-то две цифры так, что изменённое число разделится на 27 нацело.

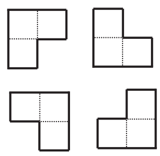
8.5. Решите уравнение

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 126.$$

7 класс

7.1. Петя и Коля покупали девочкам на Восьмое марта подарки. Петя купил ручки по цене 36 рублей за штуку, а Коля — ручки по цене 47 рублей за штуку. Оказалось, что Петя потратил меньше денег, но купил больше ручек. Докажите, что ребята вместе смогут поздравить хотя бы 9 девочек.

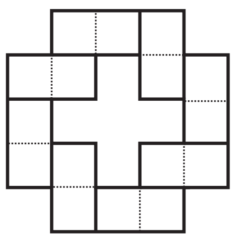
7.2. На доске 100×100 закрасили несколько клеток (размера 1×1). Оказалось, что в любом трёхклеточном уголке есть незакрашенная клетка. Докажите, что существует такое разрезание доски на прямоугольники 1×2, что в каждом прямоугольнике будет хотя бы одна незакрашенная клетка.



Уголок

7.3. Известно, что результат умножения четырёх последовательных нечётных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли оказаться в разрядах десятков и сотен полученного произведения? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

7.4. Из комплекта домино удалили все дубли (доминошки с одинаковым числом точек на обеих половинках). Используя какие-то восемь из оставшихся 21 доминошек, сложили фигуру (см. рисунок) по правилам домино: можно прикладывать друг к другу только половинки доминошек с одинаковым числом точек. Какое наименьшее суммарное число точек может быть в такой фигуре? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 7.4

7.5. Дан выпуклый четырёхугольник $KLMN$. Известно, что

$$\angle LMK + \angle MKN = 180^\circ \text{ и } KL = KN + LM.$$

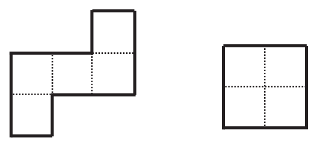
Докажите, что $\angle LKM + \angle KMN = \angle MNK$.

6 класс

6.1. Николай живет в многоэтажном доме без лифта. Сегодня он готовит борщ, но у него нет нескольких ингредиентов. Сначала он спустился к тёте Клаве за свёклой. На полпути к ней он проходил мимо 12 этажа. Тётя Клава напомнила Николаю, что для борща нужно еще и мясо. За мясом он поднялся к деду Тимофею. На полпути к нему от тети Клавы он проходил мимо 16 этажа. Дед Тимофей дал Николаю кусок мяса. После этого Николай поднялся еще на 5 этажей к дяде Васе за солью. На сколько этажей нужно теперь спуститься Николаю, чтобы попасть к себе домой и, наконец, сварить борщ? Ответ обоснуйте.

6.2. Три ученика из футбольной команды математической школы обсуждают номера на своих футболках. Алёша: «Я тут заметил, что все наши номера — двузначные простые числа». Боря: «А сумма чисел на ваших футболках равна дате моего дня рождения, который был в этом месяце». Вова: «Кстати, сумма чисел на ваших футболках равна дате моего дня рождения, который будет в этом месяце». Алёша: «А ещё, сумма чисел на ваших футболках равна сегодняшней дате». Какое число на футболке Вовы? Ответ обоснуйте.

6.3. Паша составил клетчатый квадрат размером 8×8 клеток, используя фигурки двух типов, изображённые на рисунке справа. Составьте его и Вы, причём так, чтобы присутствовали фигурки обоих типов. Фигурки могут быть повёрнуты или перевёрнуты, но не могут накладываться друг на друга.



К условию задачи 6.2

6.4. В кабинете физики есть набор из десяти гирь суммарным весом в 1 кг. Известно, что любая гиря весит меньше, чем девять остальных вместе взятых. Докажите, что все 10 гирь можно разбить на 2 группы так, чтобы суммарный вес гирь в группах отличался менее, чем в три раза.

6.5. На доске написаны три натуральных числа. Известно, что если каждое из них увеличить ровно на 4, то их произведение увеличится ровно в 30 раз. Какие числа на доске? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

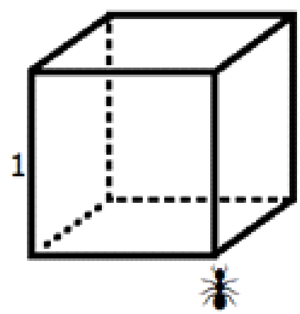
5 класс

5.1. На доске написано неверное равенство:

$$4077 + 7704 + 7740 = 2021$$

Вычеркните ровно по одной цифре в каждом из слагаемых так, чтобы равенство стало верным.

5.2. Муравей сидит в одной из вершин кубика со стороной 1 метр. Он может ползать по рёбрам куба. Может ли он проползти по каждому ребру куба дважды и вернуться в начало пути (возможно, проходя через начальную вершину в процессе движения несколько раз)? Направление движения муравей меняет только в вершинах куба. Ответ обоснуйте.



К условию задачи 5.2

5.3. Когда сторону квадрата уменьшили в 3 раза, его площадь уменьшилась на 27 см^2. На сколько уменьшится площадь нового квадрата, если его сторону ещё раз уменьшить в 3 раза? Ответ обоснуйте.

5.4. Все натуральные числа от 1 до 99 включительно записали в ряд. Под каждым числом подписали произведение его цифр. С получившимся рядом проделали то же самое и т. д. Сколько нечётных чисел в пятом ряду? Ответ обоснуйте.

5.5. В замке живут N рыцарей. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из рыцарей не дружит с врагом своего друга, и каждый рыцарь имеет ровно трёх врагов. Найдите все N, при которых это возможно.

Вузовско-академическая олимпиада
2020 — 2021 уч. год

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11 класс

11.1. *На доске написано число* 7. *За ход разрешается либо умножить число, написанное на доске, на* 7, *либо стереть любую цифру числа. Можно ли за конечное число ходов получить на доске число* 77*? Ответ обоснуйте.*(*автор задачи С. В. Костин (г. Москва)*)

Решение. Например, так:

$$7 \mapsto 49 \mapsto 4 \mapsto 28 \mapsto 196 \mapsto 16 \mapsto 112 \mapsto 11 \mapsto 77.$$

Ответ. Можно.

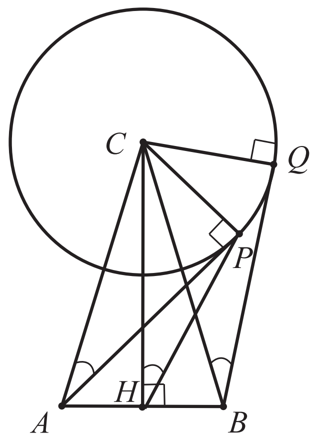
11.2. *В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли* 60 *процентов, серые —* 30 *процентов, а белые —* 10 *процентов от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истреблённых им белых ворон составляет* 120 *процентов от количества истреблённых серых и* 30 *процентов от количества истреблённых черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело две трети всех белых ворон и не более* 150 *черных? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть в заповеднике было x ворон. Тогда чёрных ворон было $0,6x$, серых — $0,3x$ и белых $0,1x$. Так как уцелело $2/3$ белых ворон, Нехорошев отстрелил $\dfrac{0,1x}{3} = \dfrac{x}{30}$ белых ворон; соответственно чёрных и серых было отстрелено $\dfrac{x}{30 \cdot 0,3} = \dfrac{x}{9}$ и $\dfrac{x}{30 \cdot 1,2} = \dfrac{x}{36}$ особей. Поскольку все эти числа — целые, число x должно быть кратно 30 и 36, то есть кратно 180. Уцелело всего $0,6x - \dfrac{x}{9} = \dfrac{22x}{45}$ чёрных ворон; по условию $\dfrac{22x}{45} \leqslant 150$. Отсюда $x \leqslant 306$, значит $x = 180$.

Ответ. 180 ворон.

11.3. *Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = CB$); CH — его высота. Построена окружность с центром в вершине C, радиус которой меньше CH; из точек A и B к окружности проведены касательные AP и BQ так, что точки касания P и Q расположены по одну сторону от прямой CH. Докажите, что точки H, P, и Q лежат на одной прямой.*

Решение. Треугольники CPA и CQB — прямоугольные (радиус проведён в точку касания), имеют равные гипотенузы ($CA = CB$) и равные катеты $CQ = CP$. Тогда они равны, и $\angle CAP = \angle CBQ$. Окружность с диаметром AC проходит через точки H и P, поскольку углы AHC и APC — прямые. Тогда $\angle CHP = \angle CAP$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, окружность с диаметром BC проходит через точки H и Q, следовательно, $\angle CBQ = \angle CHQ$. Из трёх доказанных равенств следует равенство углов $\angle CHP = \angle CHQ$. Так как точки P и Q лежат в одной полуплоскости по отношению к прямой CH, это означает совпадение лучей HP и HQ. Утверждение доказано.



К решению задачи 10.3

11.4. *На изначально пустую шахматной доску (размером 8×8 клеток) Вася хочет поставить несколько пешек и несколько ладей так, чтобы ни одна ладья не оказалась под боем другой ладьи (через пешки ладья не «прыгает»). И пешек, и ладей у Васи неограничено, кроме того, Вася может оставить какие-то поля доски пустыми. За расстановку Вася получит премию, величина которой (в рублях) равна* *количеству ладей в расстановке минус количество пешек в ней же. Какова максимальная премия, которую может получить Вася? Ответ обоснуйте.*

Решение. Если в некотором горизонтальном (равно вертикальном) ряду стоят N ладей, то чтобы они не били друг друга, между каждыми двумя соседними должно стоять по крайней мере по пешке, и всего пешек в ряду не менее $N-1$. Значит, за каждый горизонтальный ряд Вася получит не более одного рубля к премии, и вся премия будет не больше 8 рублей. Остаётся заметить, что если Вася просто не будет ставить пешки, а поставит 8 ладей по большой диагонали, как раз 8 рублей он и получит.

Ответ. 8 рублей.

11.5. Задача Шлемильха (1823-1901). *Кубическое уравнение*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет три различных корня, про которые известно, что они составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Решите уравнение.

б) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c.

Решение.

а) Пусть разность прогрессии равна $d \geqslant 0$, средний по величине корень равен $x_2 = m$. Тогда два других корня — это $x_1 = m-d$ и $x_3 = m+d$. Уравнение должно иметь вид $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$. Проведём преобразования:

$$(x-m)(x-m+d)(x-m-d) = 0$$

$$(x-m)((x-m)^2 - d^2) = 0$$

$$(x - m)(x^2 - 2mx + (m^2 - d^2)) = 0$$
$$x^3 - 3mx^2 + (3m^2 - d^2)x - m(m^2 - d^2) = 0.$$

Сопоставляя это уравнение с исходным, получаем систему

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -3m \\ b & = & 3m^2 - d^2 \\ c & = & -m(m^2 - d^2) \end{array}\right. .(*)$$

Из первого уравнения находим, что $m = -\dfrac{a}{3}$, а тогда из второго получаем $d^2 = 3m^2 - b = \dfrac{a^2}{3} - b$. Это уравнение имеет решение только при условии $a^2 > 3b$ и его положительным корнем является число $d = \sqrt{\dfrac{a^2 - 3b}{3}}$. Тогда два остальных корня уравнения таковы: $x_1 = -\dfrac{a}{3} - \sqrt{\dfrac{a^2 - 3b}{3}}$ и $x_3 = -\dfrac{a}{3} + \sqrt{\dfrac{a^2 - 3b}{3}}$.

б) Последнее уравнение системы (*) показывает, как должны быть связаны между собой коэффициенты a, b и c. Чтобы выразить эту связь в явной форме, подставим в уравнение уже найденные значения для выражений m и d. Получим

$$c = -m(m^2 - d^2) = \frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{3} + b\right) = \frac{a}{27}(-2a^2 + 9b),$$

откуда $27c = 9ab - 2a^3$. Кроме того, нельзя забывать указанное в решении пункта а условие: $a^2 > 3b$.

Ответ. а) $x \in \left\{-\dfrac{a}{3}, -\dfrac{a}{3} - \sqrt{\dfrac{a^2 - 3b}{3}}, -\dfrac{a}{3} + \sqrt{\dfrac{a^2 - 3b}{3}}\right\}$;

б) $\left\{\begin{array}{lcl} 27c & = & 9ab - 2a^3 \\ a^2 & > & 3b. \end{array}\right.$

10 класс

10.1. *На доске написано число* 7*. За ход разрешается либо умножить число, написанное на доске, на* 7*, либо стереть любую цифру числа. Можно ли за конечное число ходов получить на доске число* 77*? Ответ обоснуйте.* (*автор задачи С. В. Костин (г. Москва)*)

Решение. Например, так:

$$7 \mapsto 49 \mapsto 4 \mapsto 28 \mapsto 196 \mapsto 16 \mapsto 112 \mapsto 11 \mapsto 77.$$

Ответ. Можно.

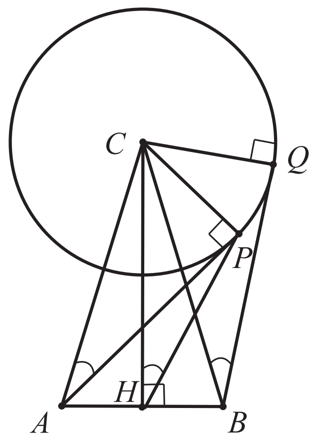
10.2. *В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли* 60 *процентов, серые —* 30 *процентов, а белые —* 10 *процентов от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истреблённых им белых ворон составляет* 120 *процентов от количества истреблённых серых и* 30 *процентов от количества истреблённых черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело две трети всех белых ворон и не более* 150 *черных? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть в заповеднике было x ворон. Тогда чёрных ворон было $0,6x$, серых — $0,3x$ и белых $0,1x$. Так как уцелело $2/3$ белых ворон, Нехорошев отстрелил $\dfrac{0,1x}{3} = \dfrac{x}{30}$ белых ворон; соответственно чёрных и серых было отстрелено $\dfrac{x}{30 \cdot 0,3} = \dfrac{x}{9}$ и $\dfrac{x}{30 \cdot 1,2} = \dfrac{x}{36}$ особей. Поскольку все эти числа — целые, число x должно быть кратно 30 и 36, то есть кратно 180. Уцелело всего $0,6x - \dfrac{x}{9} = \dfrac{22x}{45}$ чёрных ворон; по условию $\dfrac{22x}{45} \leqslant 150$. Отсюда $x \leqslant 306$, значит $x = 180$.

Ответ. 180 ворон.

10.3. *Дан равнобедренный треугольник* ABC $(AC = CB)$; CH *— его высота. Построена окружность с центром в вершине* C, *радиус которой меньше* CH; *из точек* A *и* B *к окружности проведены касательные* AP *и* BQ *так, что точки касания* P *и* Q *расположены по одну сторону от прямой* CH. *Докажите, что точки* H, P, *и* Q *лежат на одной прямой.*

Решение. Треугольники CPA и CQB — прямоугольные (радиус проведён в точку касания), имеют равные гипотенузы ($CA = CB$) и равные катеты $CQ = CP$. Тогда они равны, и $\angle CAP = \angle CBQ$. Окружность с диаметром AC проходит через точки H и P, поскольку углы AHC и APC — прямые. Тогда $\angle CHP = \angle CAP$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, окружность с диаметром BC проходит через точки H и Q, следовательно, $\angle CBQ = \angle CHQ$. Из трёх доказанных равенств следует равенство углов $\angle CHP = \angle CHQ$. Так как точки P и Q лежат в одной полуплоскости по отношению к прямой CH, это означает совпадение лучей HP и HQ. Утверждение доказано.



К решению задачи 10.3

10.4. *На изначально пустую шахматной доску (размером* 8×8 *клеток) Вася хочет поставить несколько пешек и несколько ладей так, чтобы ни одна ладья не оказалась под боем другой ладьи (через пешки ладья не «прыгает»). И пешек, и ладей у Васи неограничено, кроме того, Вася может оставить какие-то поля доски пустыми. За расстановку Вася получит премию, величина которой (в рублях) равна* *количеству ладей в расстановке минус количество пешек в ней же. Какова максимальная премия, которую может получить Вася? Ответ обоснуйте.*

Решение. Если в некотором горизонтальном (равно вертикальном) ряду стоят N ладей, то чтобы они не били друг друга, между каждыми двумя соседними должно стоять по крайней мере по пешке, и всего пешек в ряду не менее $N-1$. Значит, за каждый горизонтальный ряд Вася получит не более одного рубля к премии, и вся премия будет не больше 8 рублей. Остаётся заметить, что если Вася просто не будет ставить пешки, а поставит 8 ладей по большой диагонали, как раз 8 рублей он и получит.

Ответ. 8 рублей.

10.5. Задача Шлемильха (1823-1901). *Кубическое уравнение*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет три различных корня, про которые известно, что они составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Решите уравнение.

б) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c.

Решение.

а) Пусть разность прогрессии равна $d \geqslant 0$, средний по величине корень равен $x_2 = m$. Тогда два других корня — это $x_1 = m-d$ и $x_3 = m+d$. Уравнение должно иметь вид $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$. Проведём преобразования:

$$(x-m)(x-m+d)(x-m-d) = 0$$

$$(x-m)((x-m)^2 - d^2) = 0$$

$$(x-m)(x^2-2mx+(m^2-d^2))=0$$
$$x^3-3mx^2+(3m^2-d^2)x-m(m^2-d^2)=0.$$

Сопоставляя это уравнение с исходным, получаем систему

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -3m \\ b & = & 3m^2-d^2 \\ c & = & -m(m^2-d^2) \end{array}\right. .(*)$$

Из первого уравнения находим, что $m=-\dfrac{a}{3}$, а тогда из второго получаем $d^2=3m^2-b=\dfrac{a^2}{3}-b$. Это уравнение имеет решение только при условии $a^2>3b$ и его положительным корнем является число $d=\sqrt{\dfrac{a^2-3b}{3}}$. Тогда два остальных корня уравнения таковы: $x_1=-\dfrac{a}{3}-\sqrt{\dfrac{a^2-3b}{3}}$ и $x_3=-\dfrac{a}{3}+\sqrt{\dfrac{a^2-3b}{3}}$.

б) Последнее уравнение системы (*) показывает, как должны быть связаны между собой коэффициенты a, b и c. Чтобы выразить эту связь в явной форме, подставим в уравнение уже найденные значения для выражений m и d. Получим

$$c=-m(m^2-d^2)=\frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{3}+b\right)=\frac{a}{27}(-2a^2+9b),$$

откуда $27c=9ab-2a^3$. Кроме того, нельзя забывать указанное в решении пункта а условие: $a^2>3b$.

Ответ. а) $x\in\left\{-\dfrac{a}{3}, -\dfrac{a}{3}-\sqrt{\dfrac{a^2-3b}{3}}, -\dfrac{a}{3}+\sqrt{\dfrac{a^2-3b}{3}}\right\}$;

б) $\left\{\begin{array}{lcl} 27c & = & 9ab-2a^3 \\ a^2 & > & 3b. \end{array}\right.$

9 класс

9.1. *Функция* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *такова, что* $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$ *и* $f(3) < -4$. *Определите знак числа* a. *Ответ обоснуйте.*

Решение. Способ 1. Условие задачи описываются системой неравенств

$$\begin{cases} a - b + c & < & 1 \\ a + b + c & > & -1 \\ 9a + 3b + c & < & -4 \end{cases}.$$

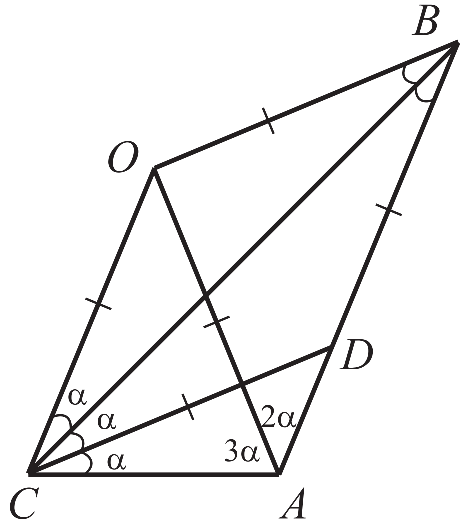
Вычтем из второго неравенства первое, и получим $2b > -2$. Вычтем из второго неравенства третье: $-8a - 2b > 3$. Сложим два полученных неравенства: $-8a > 1$, откуда $a < -0,125 < 0$.

Способ 2. Заметим, что по условию $f(3) - f(1) < -3 < -2 < f(1) - f(-1)$, откуда $f(3)+f(-1) < 2f(1)$. В случае $a > 0$ ветви параболы были бы направлены вверх, функция f была бы выпуклой (вниз) функцией, что гарантировало бы $f(3) + f(-1) > 2f\left(\frac{3-1}{2}\right) = 2f(1)$. Поскольку это неравенство нарушается, то $a \leqslant 0$. В случае $a = 0$ функция f линейна, что гарантировало бы $f(3) + f(-1) = 2f\left(\frac{3-1}{2}\right) = 2f(1)$. Поскольку это неравенство также нарушается, то $a \neq 0$. Следовательно, $a < 0$.

Ответ. $a < 0$.

9.2. *В неравнобедренном треугольнике* ABC *биссектриса угла* C *пересекла сторону* AB *в точке* D. *Оказалось, что длины отрезков* CD *и* DB *равны радиусу окружности, описанной около треугольника* ABC. *Найдите углы треугольника* ABC *(в градусах). Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Заметим, что O не может лежать с той же стороны от BC, что и точка A. Действительно, ведь тогда треугольники BDC и BOC равны по трём сторонам, и если $O \notin CD$, то один из равных углов BCO и BCD содержится в другом, чего не может быть. Если же $O \in CD$, то точки O и D совпадают, а значит треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный, что противоречит условию.



К решению 9.2

Значит точки O и A лежат по разные стороны от BC и поэтому четырёхугольник $BDCO$ — ромб. Пусть $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$. Тогда $\angle DBC = \alpha$ из равнобедренности треугольника BCD, $\angle CBO = \angle BCO = \alpha$ по свойству ромба. Треугольники AOC и AOB — равнобедренные, а значит $\angle BAO = \angle ABO = 2\alpha$ и $\angle CAO = \angle ACO = 3\alpha$. Сумма углов треугольника ABC равна $180^\circ = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 8\alpha$, откуда $\angle ABC = 22,5^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle BAC = 112,5^\circ$.

Ответ. $22,5^\circ,\ 45^\circ,\ 112,5^\circ$.

9.3. *В детской книжке три сказки. Каждая сказка начинается на новой странице, сразу после окончания предыдущей. Первая сказка начинается на первой странице книги, третья сказка заканчивается на* *последней. Оказалось, что для нумерации страниц, занимаемых каждой из трёх сказок, потребовалось одинаковое количество цифр. Какое наименьшее количество страниц может быть в книге, если известно, что на одиннадцатой странице художник изобразил Иванушку-дурачка? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть в детской книжке n страниц. Последнее условие задачи означает, что $n \geqslant 11$. Так как для нумерации страниц, занимаемых каждой из трёх сказок, потребовалось одинаковое количество цифр, то общее число цифр кратно трём.

Если $n < 100$, то для нумерации страниц понадобилось $9 + 2(n-9) = 2n-9$ цифр. Поскольку $2n-9$ всегда нечётное, то для нумерации страниц каждой сказки потребовалось нечётное число цифр, и поэтому ни одна из сказок не может начинаться на странице с двузначным номером. Тогда третья сказка начинается не позже, чем на 9 странице, и заканчивается не раньше, чем на 11 странице, а значит для нумерации страниц третьей сказки понадобилось не менее 5 цифр. Но в таком случае на первые две сказки будет выделено не более 8 страниц, и для нумерации страниц хотя бы одной из них понадобится не более 4 цифр, что противоречит условию.

Если $n \geqslant 100$, то для нумерации страниц понадобилось $9 + 2 \cdot 90 + 3(n-99) = 3n - 108$ цифр. Тогда для нумерации страниц каждой сказки понадобится $n - 36$ цифр. Если первая сказка оканчивается на странице с однозначным номером, то $n - 36 \leqslant 9$, что невозможно, а если первая сказка оканчивается на странице с трёхзначным номером, то $n - 36 \geqslant 192$, откуда $n \geqslant 228$.

Рассмотрим случай, когда первая сказка оканчивается на странице с двузначным номером k. Тогда $n - 36 = 2k - 9$, откуда $n = 2k + 27$, а поскольку $n \geqslant 100$, то $k \geqslant 37$. Если вторая сказка оканчивается на странице с двузначным номером m, то $2k-9 = 2(m-k)$, что невозможно в силу нечётности числа $2k - 9$. Значит вторая сказка оканчивается на странице с трёхзначным номером m, и поэтому $2k - 9 = 2(99 - k) + 3(m - 99) = 3m - 2k - 99$, откуда $3m = 4k + 90 = 2n + 36$. Значит m — чётное и не кратно 4, то есть $m \geqslant 102$.

Если $m = 102$, то $k = 54$ и $n = 135$. Данная ситуация удовлетворяет условиям задачи, и для нумерации страниц каждой сказки в таком случае понадобится по 99 цифр.

Ответ. 135.

9.4. *Правильный треугольник со стороной n (n — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных единичных треугольников. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на n равных фигур, каждая из которых состоит из n таких единичных треугольников. Докажите, что n делится на 4.*

9.5. Неравенство Швейцера. *Для любых положительных чисел a, b, m, M таких, что $a, b \in [m; M]$ докажите неравенство:*

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{mM}.$$

Решение. Без ограничения общности считаем, что $m \leqslant a \leqslant b \leqslant M$. Обозначим через x дробь $\frac{a}{b}$. Тогда $\frac{m}{M} \leqslant x \leqslant 1$, а левая часть доказываемого неравенства равна

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + x + \frac{1}{x} =$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} + 4 = \frac{x^2 - 2x + 1}{4} + 4 = \frac{(x-1)^2}{x} + 4.$$

Заметим, что при $x \in (0; 1)$ числитель дроби $\frac{(x-1)^2}{x}$ убывает, знаменатель возрастает и оба они положительны. Это означает, что функция $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} + 4$ является убывающей на отрезке $\left[\frac{m}{M}; 1\right]$. Тогда

$f(x) < f\left(\frac{m}{M}\right)$. Легко устанавливается равенство $f\left(\frac{m}{M}\right) = \frac{(m+M)^2}{mM}$, что и завершает доказательство.

8 класс

8.1. *В австралийском зоопарке 35% всех кенгуру серые, а 13% всех животных зоопарка — кенгуру, но не серые. Сколько процентов от общего числа всех животных зоопарка составляют кенгуру? Ответ обоснуйте.*

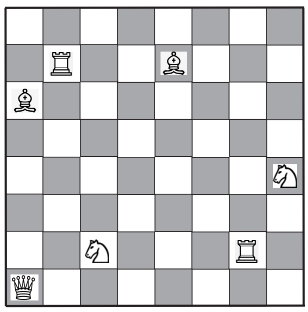
Решение.Способ 1. Пусть всего в зоопарке обитают x серых кенгуру, y не серых кенгуру и z животных, не являющихся кенгуру. Из условий задачи имеем $x = 0,35(x+y)$ и $y = 0,13(x+y+z)$.

Требуемое отношение количества кенгуру к количеству животных равно $\dfrac{x+y}{x+y+z} = \dfrac{x+y}{y} \cdot \dfrac{y}{x+y+z} = \dfrac{1}{1-\frac{x}{x+y}} \cdot \dfrac{y}{x+y+z} = \dfrac{1}{0,65} \cdot 0,13 =$ $0,2$, а значит кенгуру составляют 20% от всех животных.

Способ 2. Без ограничения общности пусть в зоопарке обитает ровно 100 кенгуру. По условию серых из них ровно 35, остальные $100 - 35 = 65$ кенгуру другого цвета; они составляют 13% от всех животных. Значит, 1% животных зоопарка составляют $65 : 13 = 5$ особей, а всего в зоопарке $5 \cdot 100 = 500$ животных. Доля кенгуру равна $100 : 500 = 0,2$, а процентное содержание $0,2 \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ. 20%.

8.2. *Имеется набор шахматных фигур, состоящий из ферзя, двух ладей, двух коней и двух слонов. Их пронумеровали числами от 1 до 7 и расставили на шахматной доске так, что фигура 1 бьёт только фигуру 2, фигура 2 бьёт только фигуру 3, ..., фигура 7 бьёт только фигуру 1. Приведите пример такой расстановки.*



К решению 8.2

Решение. Например так, как на диаграмме: ферзь $a1$ бьёт слона $a6$, который бьёт ладью $b7$, которая бьёт слона $e7$, который бьёт коня $h4$, который бьёт ладью $g2$, которая бьёт коня $c2$, который бьёт ферзя.

8.3. *В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB отметим точки K и N так, что $AK = KN = BN$. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника ABC равна периметру треугольника CMN.*

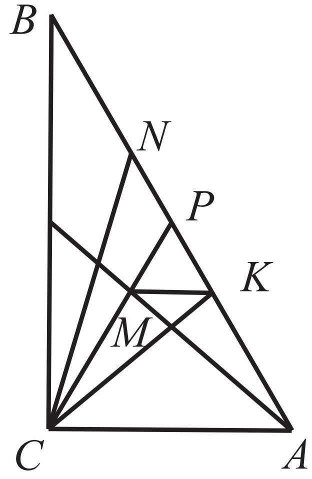
Решение. Пусть P — середина гипотенузы AB. Тогда по свойству прямоугольного треугольника $CP = \frac{1}{2}AB$,

$$CM = \frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}AB = AK = BN = KN.$$

Треугольник ACP — равнобедренный, поэтому

$$\angle ACP = \angle CAP.$$

Из этого следует равенство треугольников ACM и AKC и, значит, $AM = CK$. Аналогично доказывается, что $BM = CN$. Тогда $MA + MB + MC = CK + CN + KN$, что и требовалось доказать.



К решению 8.3

8.4. *Мальвина написала на доске натуральное число. Буратино зачем-то умножил его на* 8 *и получил число, больше* 992 000 000, *но меньше* 1 000 000 000. *А Пьеро разделил число Мальвины на* 27 *и обнаружил, что остаток от деления равен* 18. *Докажите, что в числе Мальвины можно поменять местами какие-то две цифры так, что изменённое число разделится на* 27 *нацело.*

Решение. Пусть число, которое написала Мальвина, равно n. Поскольку $992\,000\,000 < 8n < 1\,000\,000\,000$, то число n — девятизначное, и его первые три цифры равны $1, 2$ и 4. Поэтому число n представимо в виде $124 \cdot 10^6 + k$ для некоторого натурального k. Остаток от деления числа n на 27 равен 18, а значит n делится на 9. Рассмотрим числа $x = 142 \cdot 10^6 + k$ и $y = 214 \cdot 10^6 + k$. Заметим, что числа n, x и y состоят из одинакового набора цифр, а, значит, все они делятся на 9. Тогда остатки от деления каждого из них на 27 принадлежат множеству $\{0,\ 9,\ 18\}$. Кроме того, попарные разности $x - n$, $y - n$ и $y - x$ равны числам $18 \cdot 10^6$, $72 \cdot 10^6$ и $90 \cdot 10^6$, среди которых нет кратных 27. Это означает, что все три числа имеют разные остатки при делении на 27 Поэтому среди них есть число с нулевым остатком при делении на 27, что и требовалось доказать.

8.5. *Решите уравнение*

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 126.$$

Решение. Разложим все квадратные трёхчлены на множители:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3);$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4);$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2);$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Тогда

$$(x - 1)(x - 3)(x - 2)(x - 4) + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 126,$$

из чего следует, что

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 63.$$

Перемножив попарно выражения $x - 1$ и $x - 4$, а также выражения $x - 2$ и $x - 3$, получим

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4) = 63.$$

Введём замену $y = x^2 - 5x + 5$, после чего уравнение примет вид $(y-1)(y+1) = 63$, значит $y^2 - 1 = 63$, откуда $y = \pm 8$. Проведя обратную замену, имеем два варианта:

1) $x^2 - 5x + 5 = -8 \Rightarrow x^2 - 5x + 13 = 0$ — уравнение не имеет действительных решений, так как дискриминант отрицательный.

2) $x^2 - 5x + 5 = 8 \Rightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения получим $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

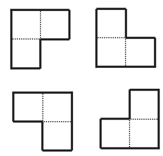
Ответ. $\dfrac{5 + \sqrt{37}}{2}$, $\dfrac{5 - \sqrt{37}}{2}$.

7 класс

7.1. *Петя и Коля покупали девочкам на Восьмое марта подарки. Петя купил ручки по цене 36 рублей за штуку, а Коля — ручки по цене 47 рублей за штуку. Оказалось, что Петя потратил меньше денег, но купил больше ручек. Докажите, что ребята вместе смогут поздравить хотя бы 9 девочек.*

Решение. Предположим, что Петя покупал ручки в два приёма: сначала купил столько же, сколько и Коля, потом докупил остальные. Тогда при первой покупке он сэкономил по $47 - 36 = 11$ на каждой ручке. По условию сэкономленных денег хватило ему по крайней мере ещё на ручку и даже чуть больше. Поэтому при первой покупке было куплено больше, чем $36 : 11$ ручек, то есть не менее 4 штук. Значит, Коля купил не меньше 4 ручек, а Петя не меньше 5. Так что 9 ручек у мальчиков точно есть.

7.2. *На доске* 100×100 *закрасили несколько клеток (размера* 1×1*). Оказалось, что в любом трёхклеточном уголке есть незакрашенная клетка. Докажите, что существует такое разрезание доски на прямоугольники* 1×2*, что в каждом прямоугольнике будет хотя бы одна незакрашенная клетка.*

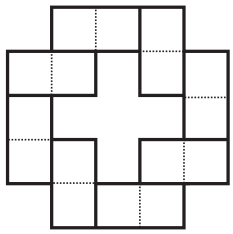


Уголок

Решение. Разрежем доску на квадраты 2×2 — это легко сделать, так как сторона квадрата содержит чётное число клеток. Заметим, что в каждом таком квадрате есть хотя бы 2 незакрашенные клетки: если бы такая клетка была одна, то удалив её мы бы получили уголок без закрашенных клеток. Если эти 2 незакрашенные клетки имеют общую сторону, разрежем квадрат по прямой, проходящей по этой стороне; в противном случае разрежем по любой из двух средних линий. В обоих случаях в каждой из разрезанных частей будет по незакрашенной клетке. Так поступим с каждым из квадратов 2×2. Разрезание получено.

7.3. *Известно, что результат умножения четырёх последовательных нечётных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли оказаться в разрядах десятков и сотен полученного произведения? Приведите все варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Среди любых пяти последовательных нечётных чисел есть кратное 5, а среди перемножаемых четырёх такого числа нет, так как по признаку делимости на 5 их произведение на 5 нацело не делится. Значит, предыдущее нечётное число (не попавшее в произведение оканчивалось цифрой 5), а перемноженные числа имеют вид $10a+7$, $10a+9$, $10a+11$ и $10a+13$. Вычислим их произведение:



К условию задачи 7.4

$$(10a+7)\cdot(10a+9)\cdot(10a+11)\cdot(10a+13) =$$

$$= ((10a+7)\cdot(10a+13))\cdot((10a+9)\cdot(10a+11)) =$$

$$= (100a^2+200a+91)\cdot(100a^2+200a+99) =$$

$$= (x+91)(x+99) = x^2+190x+9809 =$$

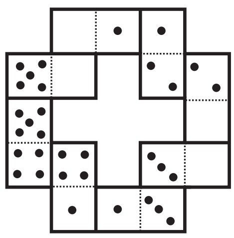
$$= x^2+190x+9000+809,$$

где $x = 100a^2+200a$. Заметим, что x кратно 100, а тогда число $x^2+190x+9000$ кратно 1000, то есть его десятичная запись оканчивается на три нуля. Значит, последние три цифры произведения — 8, 0 и 9.

Ответ. В разряде сотен только 8, в разряде десятков только 0.

7.4. *Из комплекта домино удалили все дубли (доминошки с одинаковым числом точек на обеих половинках). Используя какие-то восемь из оставшихся* 21 *доминошек, сложили фигуру (см. рисунок) по правилам* *домино: можно прикладывать друг к другу только половинки доминошек с одинаковым числом точек. Какое наименьшее суммарное число точек может быть в такой фигуре? Ответ обоснуйте.*

Решение. Так как прикладываются половинки доминошек с одинаковым числом точек, то одинаковые числа идут парами. Заметим, что ни одна пара чисел не может повториться трижды. Действительно, например, если встретятся три пары AA, то должно быть шесть доминошек с A. Но тогда будет еще шесть пар ненулевых чисел, т.е. всего не меньше девяти пар чисел. С другой стороны, какая-то пара чисел точно повторится, так как всего 8 пар. Пусть это пара AA. Тогда есть 4 доминошки с точками, то есть найдутся еще 4 пары разных чисел: AA, AA, BB, CC, DD, EE — всего 5 разных. Если шестой пары чисел не найдется, то еще две пары повторяются дважды: AA, AA, BB, BB, CC, CC, DD, EE. Но так как не только для доминошек с A точками, но и для доминошек с B точками, и для доминошек с C точками должно быть по 4 других числа на вторых половинках, то должны присутствовать доминошки AE, BE, CE. Однако E есть только на двух половинках доминошек. Противоречие. Таким образом, мы доказали, что есть не меньше шести разных пар чисел. Наименьшая сумма в этом случае достигается в случае набора пар 00, 00, 11, 11, 22, 33, 44, 55. Сумма равна 32. Пример:



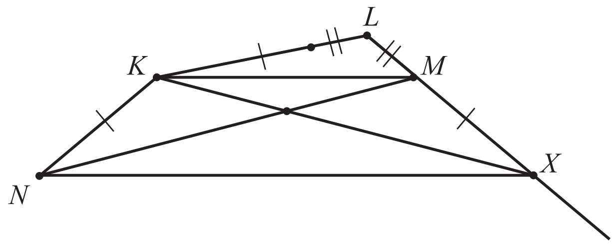
К решению задачи 7.4

Ответ. 32.

7.5. *Дан выпуклый четырёхугольник $KLMN$. Известно, что*

$$\angle LMK + \angle MKN = 180^\circ \text{ и } KL = KN + LM.$$

Докажите, что $\angle LKM + \angle KMN = \angle MNK$.



К решению задачи 7.5

Решение. На продолжении отрезка LM за точку M отметим точку X, так, чтобы $MX = KN$ (см. рисунок). Тогда $\angle XMK = \angle MKN$, значит, $\Delta XMK = \Delta MKN$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle MNK = \angle MXK$ и $\angle KMN = \angle MKX$. Треугольник LXK равнобедренный по построению, значит $\angle LXK = \angle LKX$. Тогда

$$\angle LKM + \angle KMN = \angle LKM + \angle MKX = \angle LKX = \angle LXK = \angle MNK$$

ч. т. д.

6 класс

6.1. *Николай живет в многоэтажном доме без лифта. Сегодня он готовит борщ, но у него нет нескольких ингредиентов. Сначала он спустился к тёте Клаве за свёклой. На полпути к ней он проходил мимо* 12 *этажа. Тётя Клава напомнила Николаю, что для борща нужно еще и мясо. За мясом он поднялся к деду Тимофею. На полпути к нему от тети Клавы он проходил мимо* 16 *этажа. Дед Тимофей дал Николаю кусок мяса. После этого Николай поднялся еще на* 5 *этажей к дяде Васе за солью. На сколько этажей нужно теперь спуститься Николаю, чтобы попасть к себе домой и, наконец, сварить борщ? Ответ обоснуйте.*

Решение. «Полпути» Николая к тёте Клаве начинались с 12 этажа, а «полпути» к деду Тимофею закончились на 16 этаже. Значит, вторые «полпути» на 4 этажа длиннее, а весь путь от Клавы к Тимофею на $4 \cdot 2 = 8$ этажей длиннее пути к Клаве. Добавляем еще 5 этажей до Васи: $8 + 5 = 13$ этажей отделяют Николая от заветного борща.

Ответ. На 13 этажей.

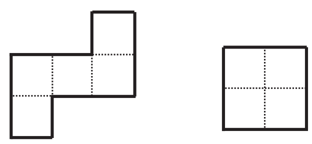
6.2. *Три ученика из футбольной команды математической школы обсуждают номера на своих футболках. Алёша: «Я тут заметил, что все наши номера — двузначные простые числа». Боря: «А сумма чисел на ваших футболках равна дате моего дня рождения, который был в этом месяце». Вова: «Кстати, сумма чисел на ваших футболках равна дате моего дня рождения, который будет в этом месяце». Алёша: «А ещё, сумма чисел на ваших футболках равна сегодняшней дате». Какое число на футболке Вовы? Ответ обоснуйте.*

Решение. Обозначим числа на футболках по первой букве имени. По условию выполнены неравенства: $\text{А}+\text{В} < \text{Б}+\text{В} < \text{А}+\text{Б}$. Так как никакие две суммы не равны между собой, среди чисел на футболках нет равных.

Наименьшие двузначные простые числа — это 11, 13, 17, 19. Если среди чисел на футболках есть число, большее 17, то наибольшая сумма А + Б не меньше $13 + 19 = 32$, т. е. не может равняться дате рождения Вовы. Следовательно, на футболках написаны числа 11, 13, 17. При этом сумма А + Б состоит из чисел 13 и 17, а у Вовы на футболке стоит число 11.

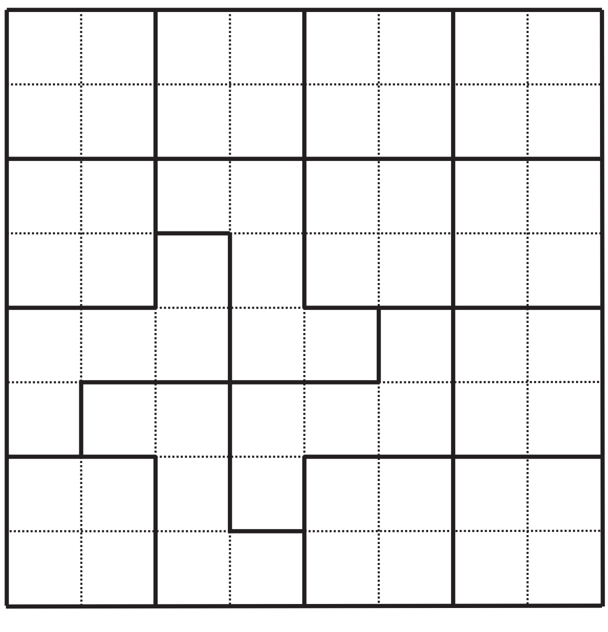
Ответ. Число 11.

6.3. *Паша составил клетчатый квадрат размером 8×8 клеток, используя фигурки двух типов, изображённые на рисунке справа. Составьте его и Вы, причём так, чтобы присутствовали фигурки обоих типов. Фигурки могут быть повёрнуты или перевёрнуты, но не могут накладываться друг на друга.*



К условию задачи 6.2

Решение. Пример разрезания:



6.4. *В кабинете физики есть набор из десяти гирь суммарным весом* *в 1 кг. Известно, что любая гиря весит меньше, чем девять остальных вместе взятых. Докажите, что все 10 гирь можно разбить на 2 группы так, чтобы суммарный вес гирь в группах отличался менее, чем в три раза.*

Решение. Из условия следует, что каждая гиря весит менее 500 грамм, так как иначе ее весь больше либо равен суммарному весу остальных девяти. Будем складывать гири по одной в первую группу до тех пор, когда суммарный вес впервые превзойдет 250 грамм. Последней мы положили гирю весом не больше 500 грамм, т.е. получили группу весом более 250 грамм, но меньше 750 грамм. Остальные гири положим во вторую группу, ее суммарный вес будет тоже от 250 до 750 грамм. Следовательно, веса этих групп различаются не более, чем в 3 раза.

6.5. *На доске написаны три натуральных числа. Известно, что если каждое из них увеличить ровно на 4, то их произведение увеличится ровно в 30 раз. Какие числа на доске? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Прибавим к некоторому натуральному числу 4. Заметим, что чем больше это число, тем в меньшее число раз оно увеличится. При этом число 1 увеличивается в 5 раз, число 2 увеличивается в 3 раза, число 3 увеличивается в 7/3 раза, число 4 увеличивается в 2 раза и т. д. Теперь разберём случаи. Если ни одно из чисел не равно единице, то каждое из чисел увеличивается не более, чем в 3 раза, а все произведение — не более, чем в 27 раз. Следовательно, одно из чисел равно 1. Тогда произведение двух оставшихся должно увеличиться в $\frac{30}{5} = 6$ раз. Если оба оставшихся числа больше двух, то их произведение увеличится не больше, чем в $\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{9}$ раза, что меньше 6. Следовательно, второе число равно 1 или 2.

Если второе число, как и первое, равно 1, то третье число должно увеличиться в $\dfrac{6}{5} = 1\dfrac{1}{5}$ раза. Тогда 4 составляет $\dfrac{1}{5}$ третьего числа, то есть третье число равно $4 \cdot 5 = 20$.

Если второе число равно 2, то то третье число должно увеличиться в $\dfrac{6}{3} = 2$ раза. Мы выше показали, что это — число 4.

Проверим:

$$(1+4)\cdot(1+4)\cdot(20+4) = 600 = 30\cdot 20 = 30\cdot(1\cdot 1\cdot 20);$$

$$(1+4)\cdot(2+4)\cdot(4+4) = 240 = 30\cdot 8 = 30\cdot(1\cdot 2\cdot 4).$$

Ответ. 1, 1, 20 или 1, 2, 4.

5 класс

5.1. *На доске написано неверное равенство:*

$$4077 + 7704 + 7740 = 2021$$

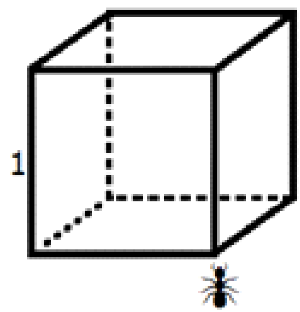
Вычеркните ровно по одной цифре в каждом из слагаемых так, чтобы равенство стало верным.

Решение. Можно, например, вычеркнуть цифры таким образом:

$$4077 \to 477;\ 7704 \to 770;\ 7740 \to 774$$

$$477 + 770 + 774 = 2021.$$

5.2. *Муравей сидит в одной из вершин кубика со стороной 1 метр. Он может ползать по рёбрам куба. Может ли он проползти по каждому ребру куба дважды и вернуться в начало пути (возможно, проходя через начальную вершину в процессе движения несколько раз)? Направление движения муравей меняет только в вершинах куба. Ответ обоснуйте.*



К условию задачи 5.2

Решение. Один из вариантов маршрута:

1) Два раза проползти по нижнему квадрату, вернувшись в начало пути;

2) Подняться вверх;

3) Проползти одно ребро верхнего квадрата, затем сползти вниз, подняться вверх;

4) Так же, как и в шаге 3) повторить еще с двумя ребрами верхнего квадрата;

5) Проползти последнее ребро верхнего квадрата;

6) Проползти второй раз по всем ребрам верхнего квадрата и спуститься вниз.

Ответ. Может.

5.3. *Когда сторону квадрата уменьшили в* 3 *раза, его площадь уменьшилась на* 27 *см*^{2}*. На сколько уменьшится площадь нового квадрата, если его сторону ещё раз уменьшить в* 3 *раза? Ответ обоснуйте.*

Решение. В результате уменьшения стороны квадрата в три раза, его площадь уменьшается в 9 раз. Другими словами, квадрат теряет $8/9$ частей своей площади. Площадь нового квадрата в 9 раз меньше площади старого, и он тоже потеряет $8/9$ частей своей площади. Следовательно, эта потеря площади тоже в 9 раз меньше: $27 : 9 = 3$.

Ответ. На 3 см^2.

5.4. *Все натуральные числа от* 1 *до* 99 *включительно записали в ряд. Под каждым числом подписали произведение его цифр. С получившимся рядом проделали то же самое и т. д. Сколько нечётных чисел в пятом ряду? Ответ обоснуйте.*

Решение. Заметим, что если число содержит в своей записи чётную цифру, то произведение цифр будет чётным. Но тогда и во всех последующих рядах произведение будет чётным. Найдем все произведения двух цифр в таблице умножения, записываемые с помощью нечётных цифр:

$$1 = 1 \cdot 1;\ 3 = 1 \cdot 3;\ 5 = 1 \cdot 5;\ 7 = 1 \cdot 7;$$

$$9 = 1 \cdot 9;\ 9 = 3 \cdot 3;\ 15 = 3 \cdot 5;\ 35 = 5 \cdot 7.$$

Все остальные произведения содержат чётные цифры. Следовательно, произведения из нечётных цифр будут только под числами, состоящих из указанных цифр. Список чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35, 51, 53, 57, 71, 75, 91 — всего 19 штук.

Ответ. 19 чисел.

5.5. *В замке живут N рыцарей. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из рыцарей не дружит с врагом своего друга, и каждый рыцарь имеет ровно трёх врагов. Найдите все N, при которых это возможно.*

Решение. Так как каждый рыцарь может дружить или враждовать с $N-1$ рыцарем, то он всегда враждует с 3 и дружит с $N-4$ рыцарями. То есть количество друзей для всех рыцарей одинаково. Рассмотрим одного рыцаря.

1) Если у него нет друзей — общее количество рыцарей равно 4. Тогда ни у кого нет друзей, и все условия выполнены.

2) Если у него один друг. Тогда, с одной стороны, у всех рыцарей ровно по одному другу, т. е. они разбиваются на пары друзей. Но с другой стороны, общее количество рыцарей равно 5, а это число нечетно, и рыцари не могут быть разбиты на пары. Противоречие.

3) Если у него 2 друга. Эти два друга тоже дружат между собой. Остальные — им враги (так как двух друзей мы знаем), причем их трое. Если они тоже дружат между собой, то все условия выполнены. Действительно, обозначим рыцарей за A, B, C, a, b, c. Тройки рыцарей A, B, C и a, b, c дружат между собой и враждуют с другой тройкой.

4) Если у него больше двух друзей. Каждый из его врагов должен враждовать как с ним, так и с каждым из его другом. Но тогда у его врагов будет больше трёх врагов. Противоречие.

Все случаи рассмотрены. Описанная ситуация возможна только в двух из них.

Ответ. 4 или 6 рыцарей.