11 класс

11.1. *Разбейте множество* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ *на* 25 *пар так, что суммы чисел в парах образуют ряд из последовательных* 25 *натуральных чисел.*

Решение. Покажем, как для любого натурального k разбить множество $\{1, 2, 3, \ldots, 4k+2\}$ на $2k+1$ пару так, чтобы суммы чисел в парах образовали ряд из последовательных натуральных чисел. Будем называть натуральные числа, не превосходящие числа $2k+1$ *маленькими*, числа, большие, чем $3k+1$ — *большими*, а числа $2k+2$, $2k+3$, …, $3k+1$ — *средними*. Итого у нас имеется $2k+1$ маленьких, k средних и $k+1$ больших чисел. Занумеруем будущие пары натуральными числами от 1 до $2k+1$ таким образом, чтобы сумма чисел в паре была тем больше, чем больше её номер. В первые k пар поместим последовательно все средние числа (по числу в пару) в порядке их убывания, в оставшиеся $k+1$ пару — все большие числа (по числу в пару) также в порядке их убывания. Чётные маленькие числа разместим в возрастающем порядке в первых k парах, а нечётные — тоже в возрастающем порядке, но в последних $k+1$ парах. Например, при $k = 2$ получится такая последовательность пар: (7; 2), (6; 4), (10; 1), (9; 3), (8; 5).

Полученное распределение требуемое, так как при переходе от пары с номером i к паре с номером $i+1$ сумма чисел пары возрастает ровно на 1. Действительно, как при $i < k$, так и при $i > k$ первое число i-й пары на 1 больше первого числа $i+1$-й пары, а второе число первой пары на 2 больше второго числа второй пары; сумма увеличилась на 1. Осталось рассмотреть только случай $i = k$. Но пара с номером k — это пара $(2k+2; 2k)$, а пара с номером $k+1$ — это пара $(4k+2; 1)$. Значит, и в этом случае сумма чисел в паре возросла на 1.

Ответ: (37; 2), (36; 4), (35; 6), …, (26; 24), (50; 1), (49; 3), …, (38; 25).

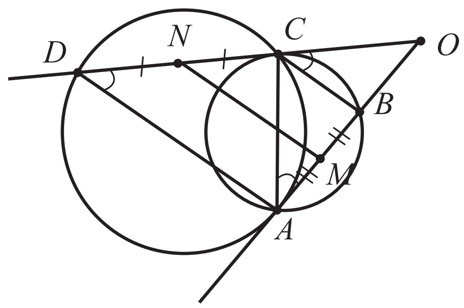
К условию задачи 11.2

11.2. *У двух сестёр дома с первого января висит отрывной календарь, на каждом листе которого напечатан рецепт одного блюда. Каждый день сёстры отрывают очередной листок и изучают рецепт на нём. Если это рецепт десерта, листок забирает себе старшая сестра, если рецепт салата — младшая сестра, а если рецепт любого другого блюда, листок выбрасывается. К первому февраля оказалось, что наименьшее общее кратное всех чисел — номеров дней — на листках младшей сестры равно* *наименьшему общему кратному всех номеров на листках старшей. Какое наименьшее количество листков календаря могло быть на этот момент выброшено? Ответ обоснуйте.*

Решение. Рассмотрим листки с датами от 16 до 31. Если такая дата представляет собой натуральную степень простого числа (p^n), то листок с этой датой обязан быть выброшен: в противном случае наименьшее общее кратное той из сестёр, которая взяла себе этот листок, делится на p^n, а наименьшее общее кратное другой сестры делится максимум на p^{n-1}. Итак, точно выброшены листки (назовём их *запретными*)с числами 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29 и 31. Имеем 8 запретных листков. Покажем, что остальные листки могли сохранится. Пусть старшая из сестёр собрала листки с датами от 5, 7, 8, 9, 11, 13, а младшая — с датами 10, 14, 18, 22, 24, 26. (Какой из сестёр достались остальные «не запретные» листки — неважно.) Тогда наименьшее общее кратное чисел на листках каждой из сестёр одно и тоже (оно равно $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$).

Ответ: 8 листков.

11.3. *Две окружности пересекаются в точках A и C. Касательная в точке A к первой окружности пересекает вторую окружность в точке $B \neq A$. Касательная в точке C ко второй окружности пересекает первую окружность в точке $D \neq C$. Точки M и N — середины AB и CD соответственно. Известно, что прямые AB и CD не параллельны. Докажите, что длина отрезка MN не меньше расстояния от точки A до прямой CD.*



К решению задачи 11.3

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD — см. рисунок. Тогда по свойству касательных $OC^2 = OB \cdot OA$ и $OC \cdot OD = OA^2$. Деля одно на другое, получаем

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OB}{OA}.$$

Теперь треугольники OBC и OAD подобны, а BC параллельно AD.

Поскольку длина половины дуги BC равна удвоенному углу BAC и удвоенному углу OCB, то по двум углам подобны треугольники OBC и OCA. Следовательно, подобны треугольники OBC, OAD, OCA и из $OC \cdot OD = OA^2$ следует $BC \cdot AD = AC^2$.

Поскольку MN — средняя линия, то

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{\frac{AC^2}{BC} + BC}{2} = \frac{AC^2 + BC^2}{2BC} \geqslant \frac{2AC \cdot BC}{2BC} = AC.$$

Осталось отметить, что расстояние от A до BC не больше AC, а значит и MN.

11.4. *Некоторый деревянный куб помещён в объединение двух шаров единичного радиуса. При какой наибольшей длине ребра куба это возможно? Ответ обоснуйте.*

Решение. Приведем сначала пример, показывающий, что куб с ребром $4/3$ может быть помещен в два шара единичного радиуса. Заметим, что прямоугольный параллелепипед размера $x \times x \times y$ помещается в шар в точности тогда, когда в этот шар помещается его диагональ, равная $\sqrt{2x^2 + y^2}$.

Значит, параллелепипед $x \times x \times x/2$ помещается в единичный шар если и только если $2x^2 + x^2/4 \leqslant 4$, то есть при $x \leqslant 4/3$. А тогда куб с ребром $4/3$ помещается в объединение двух единичных шаров, так как сам куб является объединением двух таких параллелепипедов.

Покажем, что $4/3$ — наибольшее значение длины ребра куба с указанным свойством.

От противного. Пусть какой-то куб с ребром $x > 4/3$ можно расположить в двух шарах единичного радиуса. Поскольку противоположные вершины куба (любая такая пара) расположены на расстоянии $\sqrt{(4/3)^2 + (4/3)^2 + (4/3)^2} = 4/\sqrt{3} > 2$, то они находятся в разных шарах. Следовательно в каждом шаре найдутся вершины куба, не попавшие в другой шар. Соединим попавшие в различные шары вершины отрезком. Поскольку куб — выпуклое тело, весь отрезок окажется внутри объединения шаров. В частности, эти шары имеют общую точку.

Отметим, что два шара обязаны остаться на месте при повороте вдоль их общей оси, тогда плоскость точек, равноудаленных от их центров, пересекает их также по инвариантному к повороту множеству (то есть по множеству, которое при указанном повороте переходит в себя). Поскольку шары имеют общую точку, это инвариантное множество непусто, а следовательно — круг (точку также будем считать кругом нулевого радиуса). Назовем это множество *сечением.*

Выше замечено, что противоположные вершины нашего куба должны оказаться в разных шарах, следовательно четыре вершины в одном шаре, а четыре вершины — в другом; пусть A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно. Более того, тогда какие-то четыре параллельные ребра куба будут иметь общие точки с сечением. Рассмотрим любое из таких ребер, пусть это ребро AA', обозначим его общую с сечением точку через O, как минимум один из отрезков AO и OA' не меньше другого, пусть AO не меньше OA', а значит и $x/2$. Тогда

$$CO = \sqrt{CB^2 + BA^2 + AO^2} \geqslant \sqrt{2x^2 + x^2/4} > \sqrt{32/9 + 16/36} = 2.$$

Но точки C и O лежат в одном шаре диаметром 2. Полученное противоречие доказывает, что $x \leqslant 4/3$.

Ответ. $\dfrac{4}{3}$.

11.5. *Пусть L — лежащая в первой четверти часть графика параболы $y = -x^2 - px + q$ (числа p и q — положительные). Тогда любая прямая, касающаяся кривой L (в некоторой точке N), отсекает от первого координатного угла прямоугольный треугольник. Обозначим его через Δ_N.*

а) Докажите, что существует единственное число $b_0 > 0$, при котором график функции $y = \dfrac{b_0}{x}$ имеет с L ровно одну общую точку. (Далее обозначим гиперболу — график этой функции — через Γ, а общую точку — через N^*).

б) Докажите, что любая касательная к кривой L имеет хотя бы одну общую точку с Γ.

в) Докажите, что для графика функции $y = \dfrac{b}{x}$ отрезок любой ее касательной, заключённый между осями координат, делится точкой касания пополам, а площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от выбора касательной.

г) Докажите, что площадь треугольника Δ_{N^*} меньше, чем площадь любого другого треугольника Δ_N.

д) Докажите, что если лежащая на L точка N является серединой гипотенузы треугольника Δ_N, то $N = N^*$.

Решение.

а) Способ 1. Поскольку каждая гипербола $y = b/x$ удалена как минимум на $\sqrt{b}$ от начала координат, а кривая L — ограниченное множество, то при достаточно больших b пересечение гиперболы с L будет пустым. С другой стороны, точка этой гиперболы $(\sqrt{b}; \sqrt{b})$ удалена от начала координат ровно на расстояние $\sqrt{2b}$ и при малых b лежит внутри области, ограниченной кривой L и осями координат; в этом случае гипербола имеет с кривой L по крайней мере две общие точки. Значит, найдется наибольшее положительное b_0, при котором гипербола $y = b_0/x$ имеет с L хотя бы одну общую точку.

В этой точке у L и гиперболы общая касательная, и, поскольку L будет не выше касательной, а гипербола — не ниже её, то такая точка единственна, более того, при $b > b_0$ у L и гиперболы общих точек нет, а при $b > b_0$ их по крайней мере две.

Способ 2. Надо доказать, что при некотором b уравнение $b/x = -x^2 - px - q$ имеет ровно один положительный корень. Рассмотрим наряду с указанным уравнением неравенство неравенство $b \leqslant -x^3 - px^2 - qx$ (полагаем при этом $x > 0$). Правая его часть непрерывна и для x, больше некоторого x_0, принимает лишь отрицательные значения. На отрезке $[0; x_0]$ при каком-то x функция $-x^3 - px^2 - qx$ достигает своего максимального значения, обозначим его через b_0. Покажем, что ему соответствует единственное решение x неравенства выше. Заметим сначала, что таких решений не более трёх, поскольку они являются корнями кубического уравнения $b_0 = -x^3 - px^2 - qx$. Если бы их было хотя бы два, x_1, x_2, то хорда, соединяющая точки $(x_1;\, b_0/x)$ и $(x_2;\, b_0/x_2)$ лежала бы не ниже графика гиперболы $y_{\max} = b/x$ и не выше графика параболы $y = -x^2 - px - q$. Тогда любая точка на этой хорде являлась бы решением того же уравнения $b_0 = -x^3 - px^2 - qx$. Но поскольку их не может быть больше трёх, то точки $(x_1, b_0/x)$ и $(x_2, b_0/x_2)$ совпадают и мы имеем единственное решение.

б) Рассмотрим произвольную точку $M \neq N^*$, лежащую на кривой L. Точки первого квадранта, лежащие L параболы образуют выпуклое вверх множество, и всякая касательная к L (в том числе и проходящая через точку M) лежит выше этого множества. Тогда она лежит выше и точки N^*. Итак, гипербола Γ проходит через точки, лежащие ниже касательной. С другой стороны, касательная пересекает обе положительные полуоси, а значит содержит точки, лежащие ниже гиперболы. Следовательно, касательная и гипербола обязаны иметь общую точку.

в) Возьмём любую точку $M = (a, b/a)$, лежащую на графике функции $f(x) = \dfrac{b}{x}$. Уравнение касательной в точке M:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2}(x - a).$$

Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке $A(2a;\, 0)$, ось ординат — в точке $B(0;\, 2b/a)$. Середина отрезка AB имеет координаты $\left(\dfrac{2a+0}{2};\ \dfrac{0+\frac{2b}{a}}{2}\right)$, то есть совпадает с точкой M. При этом треугольник AOB прямоугольный с катетами $2b/a$ и $2a$; его площадь равна $2b$ и действительно от точки M не зависит.

г) Рассмотрим на кривой L отличную от N^* точку N и ее треугольник Δ_N. Гипотенуза этого треугольника касается кривой L в точке N, значит через другие точки кривой, например через N^*, гипотенуза не проходит и, по пункту б), как и другие такие касательные, имеет хотя бы две общие точки с Γ. Теперь часть кривой Γ, графика

$y = b_0/x$ лежит ниже гипотенузы и мы можем, увеличивая b, найти гиперболу $y = b'/x$ с $b' > b_0$ для которой гипотенуза окажется касательной. По пункту в), из-за $b' > b_0$, любой треугольник, отсеченный касательной к $y = b'/x$ будет по площади больше, чем любой треугольник, отсеченный какой-нибудь касательной к $y = b_0/x$, в частности треугольник отсеченный общей касательной к Γ и L. Значит и площадь Δ_{N^*} меньше, чем у Δ_N.

д) Рассмотрим на кривой L какую-нибудь точку N, которая является серединой гипотенузы треугольника Δ_N. Координаты этой точки положительны, тогда найдется такое b, что гипербола $y = b/x$ содержит эту точку. Проведем через N касательную к этой гиперболе. По пункту в) N станет серединой отрезка касательной, заключенного между осями. Но N уже является серединой гипотенузы треугольника Δ_N. Значит гипотенуза является касательной и к L, и к гиперболе $y = b/x$. Поскольку L будет не выше своей касательной, а гипербола — не ниже, то N — единственная общая точка кривой L и гиперболы $y = b/x$. По пункту а) такой точкой может быть лишь N^*.

10 класс

10.1. *Безумный Шляпник сделал странные часы. Минутная стрелка у них неподвижна, а циферблат и часовая стрелка вращаются так, что часы всегда показывают правильное время. Безумный Шляпник уже сутки наблюдает за часовой стрелкой этих часов. Сколько оборотов за сутки сделала эта стрелка? Ответ обоснуйте.*

Решение. Заметим, что у обычных часов минутная стрелка за сутки делает 24 оборота, а часовая — два. Тогда у обычных часов минутная стрелка обгоняет за сутки часовую стрелку 22 раза. У Шляпника часы всегда показывают обычное время, поэтому часовая за сутки встречается с минутной по прежнему 22 раза, а если уж минутная стрелка неподвижна, то 22 — число оборотов часовой стрелки.

Ответ. 22 оборота.

10.2. *Решите уравнение*

$$(\cos x + \cos \pi x)^2 = 4.$$

Решение.

$$(\cos x + \cos \pi x)^2 = 4 \Leftrightarrow |\cos x + \cos \pi x| = 2.$$

Заметим, что

$$|\cos x + \cos \pi x| \leqslant |\cos x| + |\cos \pi x| \leqslant 1 + 1 = 2.$$

При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда, во-первых, $|\cos x| = |\cos \pi x| = 1$, а, во-вторых, числа $\cos x$ и $\cos \pi x$ одного знака. Это значит, что решаемое уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} \cos x &= 1 \\ \cos \pi x &= 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos x &= -1 \\ \cos \pi x &= -1 \end{cases}.$$

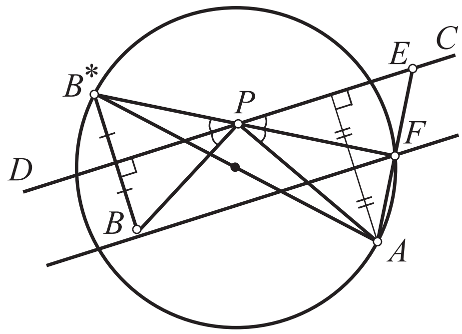
Решаем первую систему. Из первого её уравнения следует, что $x = 2\pi n$ для некоторого целого числа n; из второго — что $x = 2m$ для некоторого целого числа m. Тогда $\pi n = m$, и, так как число π иррационально, $m = n = 0$. Значит, единственным решением первой системы является число 0.

Решаем вторую систему. Из первого её уравнения следует, что $x = \pi + 2\pi n$ для некоторого целого числа n; из второго — что $x = 1 + 2m$ для некоторого целого числа m. Тогда $\pi(1 + 2n) = 1 + 2m$, $\pi = \dfrac{1 + 2m}{1 + 2n}$ — противоречие с иррациональностью числа π. Вторая система, следовательно, решений не имеет.

Ответ. $x = 0$.

10.3. *На плоскости проведена прямая l и по одну сторону от неё отмечены точки A и B. Требуется разбить прямую l точкой P на два противоположно направленных луча (с началом в точке P) так, чтобы угол, образованный одним из этих лучей с лучом PA был вдвое больше угла, образованного вторым лучом с лучом PB. С помощью циркуля и линейки постройте точку P.*

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена; точка P найдена. Обозначим интересующие нас лучи как PC и PD (см. рисунок). Проведём биссектрису угла APC — луч PF, при этом будем считать, что прямые AF и PF перпендикулярны. Так как $\angle FPC = \dfrac{1}{2}\angle APC = \angle BPD$, продолжение этого луча за точку P содержит точку B^* — образ точки B при симметрии относительно прямой CD. Далее, $\angle B^*FA = \angle PFA = 90°$, поэтому точка F лежит на окружности с диаметром AB^*. Пусть E — точка пересечения прямых AF и CD. Треугольник APE равнобедренный (в нём высота PF является биссектрисой), поэтому $AF = FE$. Значит, точка F лежит на прямой, параллельной CD и делящей пополам любой отрезок вида AX, где X — точка прямой CD.



К решению задачи 10.3

Построение. 1) Строим точку B^* — образ точки B при симметрии относительно прямой l.

2) Проводим окружность ω с диаметром AB^*.

3) Проводим произвольный отрезок AX, где X — точка прямой l.

4) Проводим через середину отрезка AX прямую $l' \parallel l$.

5) Обозначаем через F точку пересечения прямой l' и окружности ω, при этом из двух точек выбираем ту, которая дальше от точки B.

6) Через точку F проводим прямую m, перпендикулярную прямой AF.

7) P — точка пересечения прямых m и CD.

Доказательство. 1)$\angle PFA = 90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр).

2) $AF = FE$, так как F принадлежит прямой l'.

3) Треугольник APE — равнобедренный (высота PF совпадает с медианой), поэтому $\angle APE = 2\angle FPE = 2\angle DPB^*$.

4) $\angle DPB^* = \angle DPB$, так как B и B^* симметричны относительно прямой PB. Поэтому $\angle CPA = \angle APE = 2\angle DPB$, ч. т. д.

Исследование. При движении точки P вдоль прямой l (в направлении от C к D) величина угла CPB монотонно убывает (от $180°$ до $0°$), а величина угла DPA монотонно возрастает (от $0°$ до $180°$). Поэтому точка P существует и единственна. Указанное построение всегда возможно.

10.4. *Найдите все тройки простых чисел a, b, c, для которых $ab-1$ кратно c, $bc-1$ кратно a, $ac-1$ кратно b.*

Решение. Отметим, сначала, что все три числа различны, в противном случае одно из чисел делило бы произведение оставшихся, а следовательно и единицу. Тогда, без ограничения общности, можно считать, что $a < b < c$.

Также заметим, что a делит $ab+ac$, а значит и $ab+bc+ac-1$. Аналогично показывается, что $ab+bc+ac-1$ нацело делится на b и на c. Поскольку числа a, b, c просты и различны, число $ab+bc+ac-1$ обязано нацело делиться на их произведение, откуда следует

$$ab + bc + ac - 1 \geqslant abc$$

и

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1.$$

Хотя бы одна из дробей в левой части последнего неравенства должна быть больше $1/3$, так как наибольшая из них — дробь $\frac{1}{a}$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, то есть $a = 2$. Теперь сумма двух оставшихся дробей больше $1/2$, то есть большая из них, дробь $\frac{1}{b}$, должна быть больше $1/4$, и, поскольку двойка занята, $b = 3$. Наконец, $ab-1 = 5$ обязано, по условию, делиться на c, таким образом $c = 5$.

Элементарная проверка показывает, что эти a, b, c удовлетворяют всем условиям.

Ответ. Числа 2, 3, 5 (в любой последовательности).

10.5. *Имеется n кучек камней; количество камней в i-ой кучке равно a_i (все числа a_i натуральные). Два игрока по очереди забирают камни из кучек. При этом за ход разрешается брать камни только из одной (любой) кучи, в количестве либо 3, либо 5. Проигрывает тот из игроков, кто не сможет сделать ход.*

а) Кто из игроков, начинающий или его противник, имеет выигрышную стратегию, если $n = 2022$ и во всех кучках поровну камней?

б) Докажите, что результат игры (при наилучших действиях сторон) не изменится, если изначально в некоторые кучки добавить по 8 камней.

в) Пусть $a_1 = 2022$. Может ли измениться результат игры (при наилучших действиях сторон), если изначально, не изменяя числа камней в остальных кучках, в первую кучку положить на один камень больше?

г) Пусть $a_i = i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. При каких натуральных n из отрезка $2021 \leqslant n \leqslant 2030$ противник начинающего имеет выигрышную стратегию?

Ответы ко всем пунктам обоснуйте.

Решение. Будем называть начинающего *первым*, а его противника — *вторым*.

а) Второй выиграет, если распределит кучки по парам и в каждой паре кучек применит симметричную стратегию: на взятие начинающим камней из какой-либо кучки он возьмёт столько же из второй кучки пары. Ясно, что при таких его действиях после каждого хода второго в каждой паре в обеих кучках будет поровну камней, значит, стратегия осуществима, и у второго ход всегда найдётся. В силу конечности игры первый проигрывает.

б) Достаточно доказать, что результат игры не изменится при добавлении 8-и камней всего в одну (любую) кучку. Пусть в исходной позиции выигрышная стратегия есть у первого игрока (ситуация, когда выигрышная стратегия есть у второго, аналогична) и мы добавили 8 камней в кучку с номером i. Давайте считать эти добавленные камни особыми. Выигрышная стратегия первого в новой игре такова: он действует согласно своей выигрышной стратегии для исходной игры, не трогая особые камни. В какой-то момент второму придётся взять хотя бы один особый камень. Тогда можно считать, что он на этом ходу взял только особые камни (либо 3, либо 5): если это не так, заменим взятые им не особые камни на особые — число камней в любой из кучек не изменится. Теперь первый имеет возможность взять остальные особые камни и далее продолжать осуществлять свою выигрышную стратегию.

в) Согласно пункту «б» результат игры не изменится, если мы удалим из кучки любое число камней, кратное 8, то есть если в первой кучке оставим вместо 2022 камней всего 6. Покажем, что если мы добавим в неё один камень, ситуация не изменится, причём выигрышная стратегия того игрока, у кого она есть, останется неизменной. В самом деле, при любом развитии игры из первой кучки будет взято либо один раз 5 камней, либо два раза по 3. Значит, добавленный камень никак не влияет на общее количество ходов, а, значит, и на результат игры.

г) Как и в предыдущем пункте, будем удалять из каждой кучки по 8 камней, до тех пор пока это возможно: результат игры останется таким же. В итоге получим кучки, в которых менее 8 камней. Далее, кучки в которых осталось 1 или 2 камня, можно не рассматривать, так как из них уже нельзя взять камней. Останутся кучки двух видов: *бедные* с числом камней 3, 4 или 5 и *богатые* (с числом камней 6 и 7). Заметим, что результат игры не изменится, если мы уберём чётное количество бедных кучек: действительно, из каждой бедной кучки будет сделан ровно один ход, а значит, мы уменьшили общее число ходов на количество убранных кучек, то есть на чётное число. Теперь обратимся к богатым кучкам. Рассуждения, аналогичные пункту «в», показывают, что мы можем добавить в кучки из 6 камней по 1 камню и оценка позиции сохранится. Значит, можно считать, что во всех богатых кучках по 7 камней. Рассуждая, как в пункте «а», приходим к выводу, что можно убрать и чётное число богатых кучек тоже. Имеем 4 возможности. 1) Все кучки убраны. Тогда первый проиграл (у него нет ни одного хода). 2) Осталась одна бедная кучка. Тогда первый выиграл, так как он делает единственный ход. 3) Осталась одна богатая кучка. Тогда первый выигрывает, взяв из неё 5 камней. 4) Остались две кучки: одна богатая и одна бедная. Первый выигрывает, взяв три камня из богатой кучки: после его хода останется две бедных кучки.

Вывод: Начинающий проигрывает в единственном случае, когда после первоначального удаления камней останется чётное число бедных и чётное число богатых кучек. Остаётся понять, при каких n из указанного промежутка это произойдёт. Заметим, что среди любых 16 последовательных натуральных чисел ровно 2 кратны 8, ровно 2 дают в остатке 1, ровно 2 — в остатке 2 и т. д. Поэтому мы сразу можем убрать все кучки с номерами от 1 до $16k$, где k — число натуральное. Удалим все кучки с номерами, не превосходящими 2016, а также кучки с номерами 2017, 2018 (вырождаются), 2019 и 2020 (две бедные). Из кучек с номерами от 2021 до 2030 бедные кучки дадут номера 2021, 2027, 2028, 2029, а богатые кучки получатся из кучек с номерами 2022, 2023, 2030. Чётное число бедных кучек получится при $n = 2027$, $n = 2029$ и $n = 2030$. Но в последнем случае будет нечётное число богатых, поэтому остаются только два варианта.

Ответ. а) Противник начинающего. в) Не может. г) При $n = 2027$ и $n = 2029$.

9 класс

9.1. *Существуют ли различные натуральные числа n, m такие, что уравнения $x^{n+1} + x^n + 1 = 0$ и $x^{m+1} + x^m + 1 = 0$ имеют одинаковый корень?*

Решение.Если такие числа n, m существуют, то при некотором x выполнено равенство $x^{n+1} + x^n + 1 = x^{m+1} + x^m + 1$, которое равносильно равенству $x^n(x+1) = x^m(x+1)$. Отсюда получаем $(x^n - x^m)(x+1) = 0$. Без ограничения общности, пусть $n > m$. Тогда $x^m(x^{n-m} - 1)(x+1) = 0$. Корнями полученного уравнения могут быть только числа $x = \pm 1,\ x = 0$. В случаях $x = -1,\ x = 0$ справедливо равенство $x^{n+1} + x^n + 1 = x^n(x+1) + 1 = 1$, а в случае $x = 1$ — равенство $x^{n+1} + x^n + 1 = 3$, что противоречит условию задачи. Значит таких чисел n, m не существует.

Ответ: не существуют.

9.2. 50 *натуральных чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Буратино представил каждый член этой прогрессии в виде суммы двух натуральных чисел. Оказалось, что среди получившихся* 100 *слагаемых встречаются все натуральные числа от* 1 *до* 100. *Каким числом может быть разность прогрессии?*

Решение. Сумма всех слагаемых, полученных Буратино, равна $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$, и этому же равна сумма чисел всей прогрессии. Пусть a и d соответственно первый член и разность прогрессии. Тогда $\frac{2a + 49d}{2} \cdot 50 = 5050$, откуда $a + 24{,}5d = 101$. Поэтому d — чётное число, не превосходящее 4.

Приведём примеры, показывающие, что и число 2, и число 4 допустимы в качестве значения разности прогрессии. Случай $d = 2$ реализуется на прогрессии $1 + 51,\ 2 + 52,\ 3 + 53,\ \ldots,\ 50 + 100$. При $d = 4$ подойдёт прогрессия $1 + 2,\ 3 + 4,\ 5 + 6,\ \ldots,\ 99 + 100$.

Ответ. 2 или 4.

Замечание. Прогрессия для $d = 4$ единственная, прогрессий для $d = 2$ много.

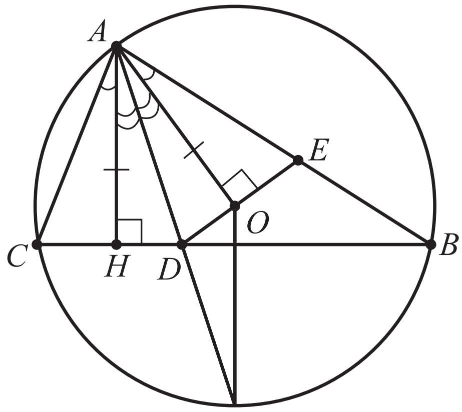
9.3. *Для натуральных n обозначим $K(n) = НОК(1, 2, 3, \ldots, n)$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что*

$$K(n) \cdot K(n+2) = K^2(n+1).$$

Решение. Для того, чтобы данное равенство выполнялось, достаточно выполнение равенства $K(n) = K(n+1) = K(n+2)$. Если $K(n) \vdots (n+1)$, то $K(n) = K(n+1)$; аналогично, если $K(n) \vdots (n+2)$, то $K(n) = K(n+2)$. Заметим, что нам подходят все числа вида $n = 10^{2k+1} - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Действительно, ведь $K(n) \vdots 2^{2k+1}$ и $K(n) \vdots 5^{2k+1}$, поэтому $K(n) \vdots 10^{2k+1} = n+1$. Поскольку число $n+2 = 10^{2k+1}+1$ кратно 11, его можно представить в виде $n+2 = 11p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Числа 11 и p меньше n, а значит $K(n) \vdots 11$ и $K(n) \vdots p$, и поэтому $K(n) \vdots 11p = n+2$, что и требовалось доказать.

Замечание. Существуют и другие числа, при которых достигается указанное равенство. Например, числа вида $n = 210k - 37$, $k \in \mathbb{N}$.

9.4. *В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) длина высоты AH равна радиусу описанной окружности треугольника ABC. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Биссектриса треугольника ABC, проведённая из вершины A, пересекла сторону BC в точке D, а прямая DO пересекла сторону AB в точке E. Докажите, что $HE = AH$.*

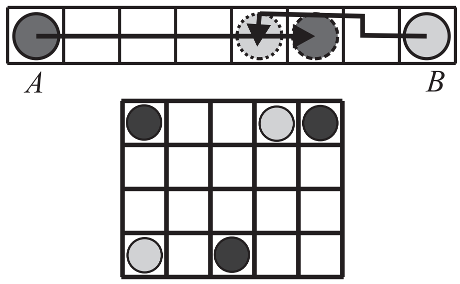


К решению задачи 9.4

Решение. Сперва заметим, что $\angle BAO = \angle CAH$. Действительно, угол AOB — центральный, значит $\angle AOB = 2\angle ACB$, а треугольник AOB — равнобедренный, поэтому угол BAO равен $90° - \angle ACB$. В то же время, угол CAH находится из прямоугольного треугольника ACH и равен $\angle CAH = 90° - \angle ACB$. Также это означает, что AD является биссектрисой угла OAH, то есть $\angle DAO = \angle DAH$. Треугольники ADH и ADO равны по двум сторонам и углу между ними, значит $\angle AOD = 90°$. Из этого следует равенство прямоугольных треугольников AEO и ACH, откуда $AE = AC$. Треугольники AEH и AOC также равны, поскольку $\angle OAC = \angle EAH$, $AC = AE$, $AH = AO$, а значит $HE = CO = AO = AH$, что и требовалось доказать.

9.5. *Имеется клетчатая доска размером $N \times M$ клеток. В некоторых её клетках* *стоят чёрные или белые фишки (не более, чем по одной фишке в клетке). Рокировкой называется следующая операция. На доске выбираются две клетки A и B, находящиеся на одной линии (горизонтальной или вертикальной), но не соседние, и такие, что на клетках A и B стоят фишки разных цветов, а между A и B фишек нет. Затем фишка с клетки A (назовем ее начинающей рокировку) переставляется на любую клетку между A и B, а фишка с клетки B «перепрыгивает» первую фишку и ставится на соседнюю с ней клетку. (см. верхний рисунок).*

а) Имеется следующая расстановка фишек (см. нижний рисунок). Можно ли несколькими рокировками переставить белую фишку из левого нижнего угла в правый верхний?



К условию задачи 9.5

Может ли случиться так, что некоторая расстановка фишек после нескольких рокировок совпадёт с изначальной, если:

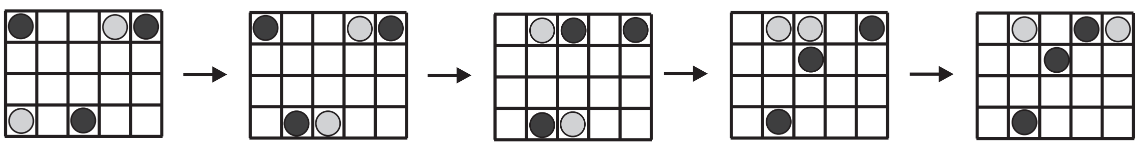
б) $M = 1$;

в) начинать рокировки могут только белые фишки;

г) дополнительных ограничений нет.

Решение.

а) Да. Ниже показана последовательность позиций, возникающих после каждой рокировки.



Далее считаем, что N — размер доски по горизонтали, а M — по вертикали.

б) Нет. От противного: предположим, существует расстановка фишек, при которой это возможно. Возьмем среди таких расстановок ту, в которой число фишек наименьшее. Обозначим P крайнюю левую фишку. Без ограничения общности будем считать, что P белая. Заметим, что так как фишки одного цвета "перепрыгивать"друг через друга не могут, то слева от P никогда не окажется другой белой фишки.

Если фишка P не участвует ни в одной рокировке, то можно убрать P с доски и получить пример с меньшим числом фишек, что по нашему предположению невозможно. Значит, в некоторый момент P все же рокируется. Покажем, что начиная с этого момента на соседней слева клетке от фишки P всегда будет стоять черная фишка.

Действительно, пусть после некоторого числа рокировок это верно. Фишки, стоящие слева от P, в такой позиции рокироваться не могут, а сама P не может рокироваться влево. Если P рокируется вправо, то на соседней слева клетке от нее вновь оказывается черная фишка. Если же рокируются какие-то две фишки правее P, то и тут наше условие не нарушается.

Таким образом, возвращение к исходной расстановке невозможно.

в) Нет. От противного: предположим, существуют расстановки фишек, при которых это возможно. Назовем такие расстановки *необычными*. Необычные расстановки, у которых значение M наименьшее возможное, назовем *странными*. Странные расстановки, на верхней горизонтали которых наименьшее возможное число фишек, назовем *дикими*. Дикие расстановки, на верхней горизонтали которых наименьшее возможное число белых фишек, назовем *безумными*. Возьмем произвольную безумную расстановку D.

Теперь пусть расстановки $D = D_1, D_2, \ldots, D_k = D$ при $k > 1$ таковы, что каждая D_{i+1} получается из D_i некоторой рокировкой. Покажем, что все расстановки D_i тоже безумные. Действительно:

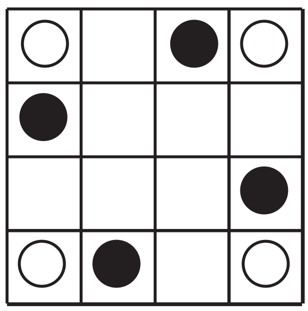
• они необычны, поскольку с помощью рокировок из D_i можно получить D, а из D — снова D_i;

• они странны, поскольку все делаются на той же доске, что и D;

• они дики, поскольку увеличить число фишек на верхней горизонтали нельзя никакой рокировкой;

• они безумны, поскольку новую белую фишку на верхнюю горизонталь поставить невозможно — для этого ей пришлось бы рокироваться с фишкой, стоящей еще выше.

Покажем, что фишки с верхней горизонтали расстановки D не рокируются с остальными. Пусть P — произвольная фишка с верхней горизонтали, Q — фишка другого цвета на той же вертикальной линии. Если P — белая, то в результате рокировки P и Q на верхней горизонтали станет на одну белую фишку меньше, что противоречит безумности расстановок D_i. Если же P — черная, то в результате рокировки число фишек на верхней линии уменьшится, что противоречит дикости D_i.



К решению задачи 9.5 (пункт «г»)

Таким образом, верхняя горизонталь независима от остальной части доски. Тогда из пункта а) следует, что фишки с верхней горизонтали вообще не рокируются. Тогда можно отпилить верхнюю горизонталь и получить необычную расстановку с меньшим значением параметра M, что противоречит странности D.

г) Да. Начальная расстановка приведена на рисунке. Соответствующая последовательность такова:

1. Совершим (в любом порядке) четыре рокировки, начинаемые угловыми фишками;

2. Еще раз совершим (и снова в любом порядке) четыре рокировки, начинаемые угловыми фишками.

8 класс

8.1. *Последовательные целые числа a и b таковы, что уравнения $ax^2+bx+1=0$ и $bx^2+ax+1=0$ имеют общий корень. Найдите все возможные значения a и b.*

Решение. Из условия задачи следует, что при некотором x выполнено равенство $ax^2+bx+1=bx^2+ax+1$, которое равносильно равенству $x^2(a-b)-x(a-b)=0$. Так как числа a и b последовательные, $a\neq b$ и поэтому $x^2-x=0$. Корень $x=0$ не подходит, так как тогда $ax^2+bx+1=1$. Значит $x=1$, и при подстановке получим $a+b+1=0$. Если $b=a+1$, то $2a+2=0$, откуда $a=-1,\ b=0$. Аналогично, при $a=b+1$ получим $a=0,\ b=-1$.

Ответ. $a=-1,\ b=0$ и $a=0,\ b=-1$.

8.2. *На математической олимпиаде участникам предлагалась такая задача: «Петя задумал три различные цифры, не равные 0. Затем он всеми возможными способами составил из этих цифр трёхзначные числа без повторяющихся цифр. Сумма всех этих чисел оказалась равна N. Какие три цифры задумал Петя?» Ввиду неисправности принтера число N не пропечаталось. Определите, какие значения оно могло принимать, если известно, что задача имела единственный ответ.*

Решение. Всего Петя составил $3!=6$ трёхзначных чисел. При этом в каждом из трёх разрядов (единицы, десятки и сотни) этих чисел все задуманные цифры встречаются одно и то же количество раз, а именно по 2 раза каждое. Следовательно, сумма всех шести чисел равна $2S+10\cdot 2S+100\cdot 2S=222S$, где S — сумма всех цифр, задуманных Петей. Таким образом, по числу N число S определяется однозначно (делением на 222). Кроме того, всякие 3 различные ненулевые цифры, дающие в сумме S, приведут к одному и тому же значению N. Наименьшее допустимое значение N равняется $1+2+3=6$, наибольшее — $7+8+9=24$. Если $S=6$ или $S=7$, то наборы цифр определяются однозначно: $1,\ 2,\ 3$ и $1,\ 2,\ 4$. Также однозначно они определяются при $S=24$ (набор $7,\ 8,\ 9$) и при $S=23$ (набор $6,\ 8,\ 9$). Покажем, что при $8\leqslant S\leqslant 22$ существует по крайней мере два набора из трёх цифр с суммой S.

Если $S\in\{8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$, то существуют наборы $\left\{1,\ \frac{S}{2}-1,\ \frac{S}{2}\right\}$ и $\left\{1,\ \frac{S}{2}-2,\ \frac{S}{2}+1\right\}$.

Если $S\in\{9,\ 11,\ 13,\ 15\}$, то существуют наборы $\left\{1,\ \frac{S-1}{2}-1,\ \frac{S-1}{2}+1\right\}$ и $\left\{1,\ \frac{S-1}{2}-2,\ \frac{S-1}{2}+2\right\}$.

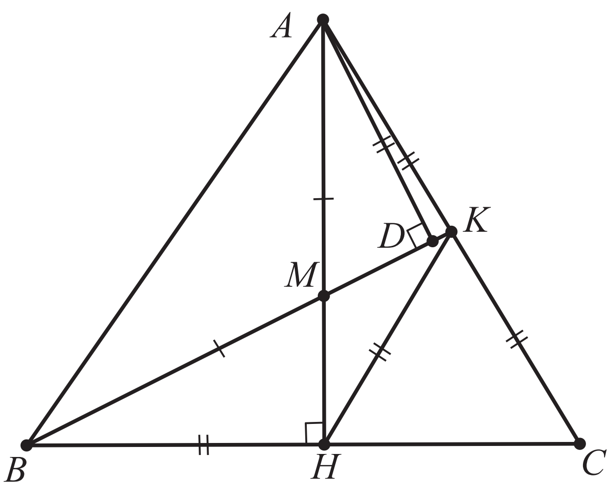
Если $S=17$, то существуют наборы $\{1,\ 7,\ 9\}$ и $\{2,\ 6,\ 9\}$.

Если $18\leqslant S\leqslant 22$, то существуют наборы $\{S-17,\ 8,\ 9\}$ и $\{S-16,\ 7,\ 9\}$.

Итак, $S \in \{6,\ 7,\ 23,\ 24\}$. Соответствующие значения для N в 222 раза больше и равны $1332,\ 1554,\ 5106,\ 5328$.

Ответ. $1332,\ 1554,\ 5106,\ 5328$.

8.3. *В остроугольном треугольнике ABC высота AH и медиана BK пересекаются в точке M. Известно, что $AM = BM$ и $BH = HK$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.*



К решению задачи 8.3

Решение. Из условия следует, что HK — медиана в прямоугольном треугольнике AHC, а значит $AK = KH = BH$. Докажем, что $\angle AKM = 90°$. Предположим, что это не так, то есть $\angle AKM \neq 90°$. Из точки A опустим перпендикуляр AD на прямую BK. По нашему предположению $K \neq D$. Треугольники ADM и BHM равны по гипотенузе и острому углу, значит $AD = BH$. Но в таком случае треугольник AKD — прямоугольный и равнобедренный, что приводит нас к противоречию. Следовательно, $\angle AKM = 90°$. Так как BK является медианой и высотой, треугольник ABC — равнобедренный, то есть $AB = BC$. Треугольники ABK и ABH равны по катету и гипотенузе, а значит $\angle ABH = \angle BAK$. Последнее равенство означает, что треугольник ABC — равносторонний.

8.4. *В клубе состоит тысяча человек. Известно, что каждый из них имеет в этом клубе по меньшей мере одного знакомого. Время от времени в клуб могут вступать новые участники, а действительные члены клуба — знакомиться друг с другом. Уже знакомые участники не перестают быть знакомы ни при каких обстоятельствах, а при выходе из клуба считается хорошим тоном соблюдать следующие правила: во-первых, на момент выхода человеку следует иметь среди участников клуба не менее трех знакомых; во-вторых, выходящий проводит церемонию, в ходе которой все его знакомые члены клуба собираются в хоровод, причем соседи по хороводу изначально незнакомы и знакомятся в ходе церемонии. Докажите, что если все будут соблюдать* *хороший тон, то в клубе никогда не окажется меньше тридцати участников.*

Решение. Пару знакомых друг с другом членов клуба назовем *рукопожатием.* Заметим, что суммарное число рукопожатий в клубе со временем не уменьшается: при выходе любого участника образуется столько же рукопожатий, сколько прекращает существование. Вместе с тем, если в какой-то момент в клубе состоит n человек, то число рукопожатий в нем не может превосходить число пар людей вообще, то есть $\frac{n(n-1)}{2}$. Изначально в клубе по меньшей мере 500 рукопожатий. Значит, в дальнейшем всегда будет выполняться $\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 500$, то есть $n \geqslant 33 > 30$.

8.5. *Жулик загадал n-значное число, все цифры в котором различны, и предлагает Телепату его отгадывать, последовательно называя n-значные числа, все цифры в которых различны. В ответ на каждое число, названное Телепатом (попытка), Жулик считает, сколько в этом числе быков (определение ниже), сколько в нём коров и должен сообщить эту информацию вслух.*

Бык — это цифра числа, которая совпадает со стоящей в том же разряде цифрой загаданного числа; корова — это цифра числа, которая есть также и в загаданном числе, но стоит там в другом разряде. Например, если загадано число 1023, а названо 1234, то 1 — это бык, 2 и 3 — коровы. В этом случае Жулик должен сказать: 2 коровы и 1 бык.

Телепат знает загаданное Жуликом число, а также знает, что Жулик мухлюет: всегда называет неправильное число быков и неправильное число коров. Телепат хочет сыграть так, чтобы наблюдающий за игрой Идеальный Логик, не зная загаданного числа, убедился в том, что Жулик не всегда говорит правду. Хватит ли Телепату для этого m попыток, если

а) $n = 2,\ m = 1$? *(1 балл)*

б) $n = 3,\ m = 2$? *(2 балла)*

в) $n = 4,\ m = 3$? *(3 балла)*

г) $n = 5,\ m = 4$? *(4 балла)*

д) n *— произвольное целое число от* 2 *до* 10, $m = 10^{10}$? *(4 балла)*

(Известно, что Телепат может продолжать свои попытки даже в случае ответта «n быков, 0 *коров.»)*

Решение. Пусть загадано число $X = x_1x_2\ldots x_n$. Без ограничения общности будем полагать, что $x_k = k$, если $k \leqslant 9$, и $x_{10} = 0$. Цифры, присутствующие в загаданном числе, будем называть *правильными.* Сделаем несколько наблюдений:

• если Телепат называет число, в котором вообще нет правильных цифр, то Жулик вынужден сказать, что в этом числе хотя бы один бык и хотя бы одна корова;

• если Телепат называет два числа, отличающиеся только порядком цифр, а по версии Жулика в этих числах разное количество правильных цифр, то Жулик попался;

• если числа A и B отличаются в каждом разряде, и про каждое из них Жулик сказал, что оно содержит быка, то эти быки — разные цифры.

а) Да. Если Телепат назовет 34, то Жулику придется сказать, что в этом числе есть хотя бы один бык и хотя бы одна корова, то есть цифры 3 и 4 обе правильные, но на верной позиции стоит только одна из них. Это невозможно.

б) Да. Телепат называет 456 и 789. По версии Жулика в этих двух числах суммарно по меньшей мере четыре правильных цифры, что невозможно.

в) Да. Первым ходом Телепат может назвать число 5678. Если теперь суммарное число быков и коров в ответе Жулика равно

• четырем, то Телепат говорит 1234 — по версии Жулика в этом числе должна быть хотя бы одна корова. Это невозможно;

• трем, то Телепат называет 2341. Жулик вынужден сказать, что в этом числе один бык. Далее Телепат называет 3412, и Жулику нечего ответить;

• двум, то есть Жулик сказал «один бык и одна корова», то Телепат называет 6785 и 7856. Оба раза Жулик вынужден отвечать «один бык и одна корова». При этом все три названных Жуликом быка должны быть различны, то есть среди цифр $5, 6, 7, 8$ как минимум три правильных, а не две.

г) Да. Первым ходом Телепат называет 67890. Если по версии Жулика все пять цифр правильные, то на 12345 ему будет нечего ответить. Если правильных цифр четыре, то Телепат называет 23451 и 34512 и тоже загоняет Жулика в тупик. Если же правильных цифр менее четырёх, то Телепат называет 78906, 89067 и 90678 — на каждый из четырёх запросов Жулик должен сказать по крайней мере об одном быке, но это невозможно.

д) Да. Указанного числа попыток достаточно для того, чтобы перебрать всевозможные комбинации. Предположим, Жулику удалось дать на все запросы непротиворечивые ответы, то есть что существует число $Y = y_1 y_1 \ldots y_n$ такое, что ответы Жулика были бы верными, если бы загаданным числом было Y. В частности, на запрос Y (и только на него) Жулик должен ответить «n быков, 0 коров», так что число Y Телепату и Идеальному логику извеестны. Покажем, что существует такое число $Z = z_1 z_2 \ldots z_n$, в котором количество быков совпадает с количеством цифр, которые были бы быками, если бы Жулик загадал Y (назовем такие цифры *псевдобыками*).

Если $n \leqslant 8$, то будем выбирать цифры $z_1, z_2, \ldots, z_n$ по очереди таким образом, чтобы z_k не было равно ни x_k, ни y_k. Это возможно, поскольку каждый раз у нас остается не менее трех вариантов для z_k.

Теперь пусть $n \geqslant 9$ Две последние цифры числа X и две последние цифры числа Y назовем *проблемными.* Значения z_k будем выбирать в порядке возрастания k так, чтобы z_k не было равно ни x_k, ни y_k. При этом всегда, когда это возможно, будем использовать проблемную цифру. Покажем, что после выбора z_8 все проблемные цифры будут использованы (что позволит нам выбрать z_{n-1} и z_n без нарушения нашего условия).

Так как всего проблемных цифр не более четырех, то не позднее выбора z_2 останется только две неиспользованных проблемных цифры. Для каждой из них невозможны максимум две позиции, поэтому шести позиций от z_3 до z_8 более, чем достаточно для размещения оставшихся проблемных цифр.

Мы построили число Z, в котором нуль быков и псевдобыков. Жулик на запрос Z вынужден назвать положительное число быков, что противоречит как его ответу на запрос Y, так и нашему предположению.

7 класс

7.1. *Семён забыл взять часы, поэтому спросил у Николы: «Который час?» Никола ответил: «Если сложить четверть времени, прошедшего с последнего полудня, и половину времени, оставшегося до следующего полудня, то как раз получится текущее время». Помогите Семёну подсчитать, сколько же сейчас времени. (Известно, что разговор происходил не в полдень.)*

Решение. Способ 1. От «последнего» полудня до «следующего» полудня ровно одни сутки. При этом от ненулевой части этих суток берётся половина, от другой ненулевой части — только четверть, т. е. на часах менее 12 часов. Обозначим искомое время за t. Тогда

$$t = \frac{12+t}{4} + \frac{12-t}{2},$$

откуда $t = 7\frac{1}{5}$, что соответствует 7 часам 12 минутам.

Способ 2. Пусть от полудня прошло t часов. Тогда условие задачи равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{t}{4} + \dfrac{24-t}{2} & = & t+12 \\ 0 & < t < & 12 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{t}{4} + \dfrac{24-t}{2} & = & t-12 \\ 12 & \leqslant t < & 24 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Первое уравнение первой системы имеет единственный корень $t = 0$, поэтому система решений не имеет. Первое уравнение второй системы (и вся система) имеет корнем число $t = 19\frac{1}{5}$, что и является решением всей совокупности. На часах $t = 19\frac{1}{5} - 12 = 7\frac{1}{5}$ часов, или 7 часов 12 минут

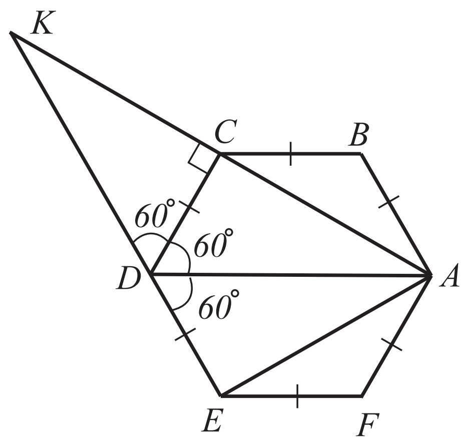
Ответ: 7 часов 12 минут.

7.2. *Можно ли покрасить все клетки квадрата* 8×8 *в чёрный и белый цвета так, чтобы в любом прямоугольнике внутри него, состоящем из трёх или большего числа клеток, количества клеток чёрного и белого цвета отличались ровно на* 1 *или на* 2*? Ответ обоснуйте.*

Решение. Разобьём квадрат на 2 равные части. В этих частях по 32 клетки. В требуемой раскраске количество чёрных и белых клеток внутри прямоугольника с площадью 32 клетки обязательно должно быть одинаковым по чётности, так как число 32 чётное. Но это означает, что разность количества чёрных и белых клеток равна 2. Тогда во всём квадрате разность между количеством чёрных и белых клеток равна $2 + 2 = 4$ или $2 - 2 = 0$, а должна быть равна 1 или 2.

Ответ: Нельзя.

7.3. *$ABCDEF$ — правильный шестиугольник, т. е. шестиугольник, все стороны которого равны между собой, а все внутренние углы составляют 120°. Прямые AC и DE пересекаются в точке K. Докажите, что C — середина отрезка AK.*



К решению задачи 7.3

Решение. Так как каждый из внутренних углов шестиугольника равен 120°, имеем равенство

$$\angle CDK = 180^\circ - \angle CDE = 60^\circ.$$

Треугольник ABC — равнобедренный с углом при вершине $\angle B = 120^\circ$; значит,

$$\angle BAC = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Рассмотрим треугольники ABC и AFE. Они равны ($AB = BC = AF = FE$; $\angle ABC = \angle AFE = 120^\circ$), поэтому $AC = AE$. Тогда треугольники ACD и AED равны по трём сторонам, $\angle ADC = \angle ADE = 0,5\angle CDE = 60^\circ$. Значит, DC — биссектриса треугольника ADK.

Кроме того $\angle DAB = 60^\circ$ (доказательство аналогично), а тогда

$$\angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

и из треугольника DAC

$$\angle DCA = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

В треугольнике ADK, следовательно, отрезок DC является одновременно биссектрисой и высотой; треугольник ADK — равнобедренный ($AD = DK$); отрезок DC также будет его медианой. Значит $CK = CA$, ч. т. д.

7.4. *В пяти одинаковых мешочках лежат по* 15 *монет. В первом мешочке* 15 *золотых монет, во втором — 15 серебряных, в третьем — 15 бронзовых, в четвёртом и пятом — по 5 золотых, серебряных и бронзовых монет. Алексей может наугад доставать монеты из любых мешочков, при этом он не видит, какие монеты остались в мешочке (извлечённые монеты он, конечно, видит). При каком наименьшем суммарном количестве извлечённых монет Алексей сможет наверняка определить содержимое хотя бы одного мешочка? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть Алексей достанет по одной монете из каждого мешочка. Среди извлечённых монет будут хотя бы одна золотая, серебряная и бронзовая монеты, так как он их достанет из мешочков с однотипными монетами. С другой стороны, по принципу Дирихле, Алексей достанет не более одной монеты какого-то из трёх типов, так как достаёт всего 5 монет. Соответственно, та монета, которая оказалась в единственном экземпляре, извлечена из мешочка с 15 монетами этого типа.

Покажем теперь, что четырёх монет не достаточно. Пусть Алексею не везёт, и если он достаёт несколько монет из одного мешочка, то эти монеты оказываются одинаковыми. Так как в каждом мешочке (даже с монетами разных типов) есть по 5 однотипных монет, то дополнительные монеты из таких мешочков не дают новой информации. При этом Алексей извлечёт монеты из не более, чем четырёх мешочков (разрешим ему взять ровно из четырёх). Если эти монеты окажутся: две золотых, серебряная, бронзовая, то Алексей не сможет узнать содержимое. Действительно, возможны такие варианты:

Монета	Вариант 1	Вариант 2
золотая 1	все золотые	разные
золотая 2	разные	все золотые
серебряная	все серебряные	разные
бронзовая	разные	все бронзовые
пятый мешочек	все бронзовые	все серебряные

Все пять мешочков в двух вариантах не совпадают, поэтому ни один из пяти мешочков не может быть наверняка определён.

Замечание. Если Алексей извлечёт из четырёх мешочков две золотые и две серебряные монеты, то он сможет определить мешочек с бронзовыми монетами.

Ответ: 5 монет.

7.5. *Дано натуральное число $k > 1$. На столе лежат $2k$ карточек с натуральными числами от 1 до $2k$ включительно, по одному числу на карточке. Все карточки* *разложены в две кучи А и Б, причём количество карточек в кучах не обязательно одинаковое, но сумма чисел на всех карточках в А равна сумме чисел на всех карточках в Б.*

а) Докажите, что число k чётно (т. е. число карточек делится на 4).

б) Пусть в А и Б поровну карточек. Известно, что из А можно выбрать две карточки, сумма чисел на которых равна $2k+1$. Докажите, что и из Б можно выбрать две карточки с такой же суммой.

в) Найдите какое-нибудь $k > 1$ и такие кучи А и Б, что из А и из Б нельзя выбрать по паре карточек с одинаковой суммой.

г) Пусть карточки разложены так, что из А и из Б нельзя выбрать по паре карточек с одинаковой суммой. При этом карточка с числом 1 лежит в куче А. Докажите, что сумма чисел на любых двух карточках из А меньше суммы чисел на любых двух карточках из Б.

Решение. а) Так как суммы чисел на карточках в обеих кучах равны, общая сумма всех чисел на карточках чётна. Значит, на карточках чётное количество нечётных чисел. Разобъём все записанные числа на пары $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $\ldots$ $(2k-1,\ 2k)$. В каждой паре нечётно ровно одно число — первое. Значит, таких пар должно быть чётное количество, а количество карточек вдвое больше, то есть должно быть кратно 4.

б) Рассмотрим k пар карточек: $(1;\ 2k)$, $(2;\ 2k-1)$, $(3;\ 2k-2)$, $\ldots$, $(k-1;\ k+2)$, $(k;\ k+1)$ — это всевозможные пары с суммой чисел $2k+1$. Пусть ни одна такая пара не лежит в куче Б. Тогда из каждой пары хотя бы одна карточка лежит в куче А. В куче А ровно k карточек, поэтому в ней лежит из каждой пары ровно во 1 карточке. Значит, ни одна из рассматриваемых пар в куче А не лежит вопреки условию.

в) Например, $k = 10$, то есть имеется ровно 20 карточек. Пусть кучка А содержит карточки с числами от 1 до 14 (их сумма 105), кучка Б — остальные, с номерами от 15 до 20 (их сумма тоже 105). Тогда сумма на любых двух карточках A не больше $13 + 14 = 27$, а на любых двух из Б не меньше $15 + 16 = 31$. Следовательно, в данном примере невозможно выбрать две пары карточек с равными суммами.

г) Упорядочим карточки в наборе по возрастанию и каждое число заменим на А или Б в соответствии с тем, в какой куче оно оказалось. Например, при $k = 4$ разбиение А $= \{1,\ 4,\ 6,\ 7\}$, Б $= \{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$ запишется в виде АББАБААБ. По условию, полученная строка начинается с А.

Заметим, что если в полученной строке, состоящей из А и Б, встретятся два непересекающихся фрагмента АБ и БА, то из соответствующих четырёх чисел можно собрать две пары с равной суммой, так как одно число из А на единицу больше, а другое на единицу меньше числа из Б в этих парах. Соответственно, необходимым условием отсутствия пар с одинаковой суммой является отсутствие таких фрагментов в строке. Предположим, что таких фрагментов нет. Одно число всегда меньше суммы всех остальных, так как сумма всех чисел больше, чем $1+(2k-1)+2k=4k$. Следовательно, в каждой из куч А и Б содержится не менее двух чисел. Итак, строка начинается с одной или нескольких А, затем будет буква Б — фрагмент АБ обязательно присутствует в строке. Следовательно, отдельного фрагмента БА в строке нет, т. е. либо вообще таких фрагментов нет (*), либо БА содержит первую Б в строке (**). Случай (*) даёт строку вида ААА...АААБББ...БББ, в котором все числа на карточках в А меньше чисел на карточках в Б. Случай (**) даёт начало строки ААА...ААABA. Если следующей буквой будет А, то в строке будет ещё один фрагмент АБ (так как есть вторая Б), и найдутся непересекающиеся АБ и БА. Если же нет, то строка должна иметь вид ААА...АААБАБББ...БББ. Но и в этом случае на любых двух карточках в А сумма меньше, чем на любых двух карточках в Б. Таким образом, под условие задачи подходят два вида разбиений на группы, и для каждого из них утверждение очевидно.

6 класс

6.1. *В торговой компании работали 2022 человека. После раскрытия мошеннической схемы все сотрудники уволились по очереди один за другим. Каждый из них, уходя, гордо заявил: «Я не хочу работать с мошенниками. Но я рад, что в компании ещё остались сотрудники, которые всегда говорят только правду». Сколько сотрудников компании на самом деле всегда говорят правду? Ответ обоснуйте.*

Решение. Последний уволившийся сотрудник, говорящий правду, не может сказать, что «остались сотрудники, которые говорят правду». А если никто из таких сотрудников не последний, то вообще нет сотрудников, говоряших правду.

Ответ: Ни одного.

6.2. *В трёх ящиках лежат фрукты. Сначала Петя переложил одну пятую часть фруктов из первого ящика и одну шестую часть фруктов из второго ящика в третий. Потом Петя переложил по одной седьмой части фруктов, лежащих в третьем ящике, в первые два. После всех этих перекладываний количество фруктов в каждом ящике оказалось равным изначальному. Докажите, что в первом и третьем ящике поровну фруктов.*

Решение. Обозначим пятую часть содержимого первого ящика за x. Тогда в первом ящике изначально было $5x$ фруктов. При этом x фруктов переложили в третий ящик и вернули обратно, т.е. x — это седьмая часть содержимого третьего ящика после первого перекладывания. Следовательно, в третьем ящике в этот момент было $7x$ фруктов, а изначально на $2x$ меньше, т. е. $5x$ — столько же, сколько и в первом ящике.

6.3. *Мальвина дала задачу для Буратино: «Найди два числа: четырёхзначное A и трёхзначное B такие, что их сумма равна 2022. При этом, если в числе A поменять местами две цифры, то сумма станет равна 2202. А если после этого поменять местами две цифры ещё и в числе B, то сумма станет равна 2220». Помогите Буратино найти хотя бы одну пару таких чисел A и B.*

Решение. Подойдут, например, числа 1243 и 779. Проверим:

$$1243 + 779 = 2022, \quad 1423 + 779 = 2202, \quad 1423 + 797 = 2220.$$

<u>Замечание.</u> Есть и множество других примеров. Заметим, что $2202 - 2022 = 180$. Если цифра десятков в A на 2 больше цифры сотен, то перестановка цифр в этих

разрядах даёт прибавку «плюс 200 минус 20». Далее, $2220 - 2202 = 18$. Такую разность можно получить, если цифра единиц в B на 2 больше цифры десятков.

6.4. *Известно, что число* 202 220 220 002 022 002 022 *является произведением пяти различных простых чисел. Найдите наибольшее среди этих пяти чисел. Ответ обоснуйте.*

Решение. Данное число выглядит следующим образом:

$$2022\,2022\,000\,2022\,00\,2022.$$

Следовательно, число можно представить в виде $2022 \cdot 1\,0001\,000\,0001\,00\,0001$. Первый множитель является произведением трёх простых чисел: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 377$. Заметим, что во втором множителе единицы стоят на 1, 5, 12 и 18 местах, т.е. две на чётных и две на нечётных местах. По признаку делимости данное число делится на 11. Чтобы найти последний, пятый простой множитель, надо поделить второй множитель на 11 (можно столбиком).

Ответ: 9 091 818 181 909 091.

6.5. *В волейбольном турнире участвовало несколько команд. Каждая команда должна была сыграть с каждой по одному матчу. Однако во время турнира в двух командах обнаружились больные коронавирусом — эти команды были сняты с турнира досрочно. (Остальные команды доиграли турнир до конца.) Известно, что обе снятых команды сыграли поровну матчей, а во всём турнире было проведено* 24 *матча. Успели ли снятые команды сыграть матч друг против друга? Ответ обоснуйте.*

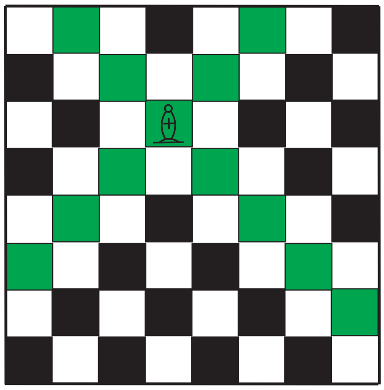
Решение. Если не учитывать две заболевшие команды, то все остальные сыграли друг с другом ровно по одному разу. Если таких команд k, то каждая из них играет $k-1$ раз, и общее количество игр между ними равно $\dfrac{k(k-1)}{2} \leqslant 24$. При этом количество игр заболевших команд не превосходит $2k+1$. Перебором найдём подходящие k. Заболешие — количество игр с двумя заболевшими командами.

k	1	2	3	4	5	6	7	$\geqslant 8$
$k(k-1)/2$	0	1	3	6	10	15	21	$\geqslant 28$
заболевшие	24	23	21	18	14	9	3	< 0
$2k+1$	3	5	7	9	11	13	15	$\geqslant 17$

Из таблицы видно, что возможны два разных турнира (с $6+2=8$ и $7+2=9$ командами), в каждом из которых заболевшие команды играют нечётное количество игр (9 или 3). Так как команды сыграли поровну раз, одну игру они должны были играть одновременно, т. е. друг с другом.

Ответ: Успели.

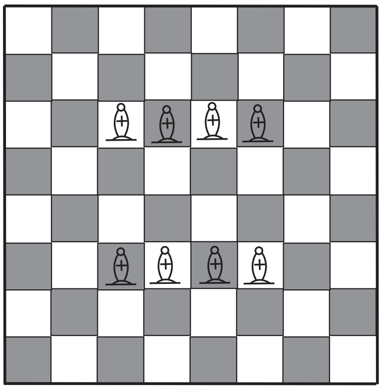
6.6. *Шахматная фигура «слон» бьёт по диагонали на любое количество клеток — см. рисунок. Какое наименьшее количество слонов нужно поставить на пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы на границе доски не было ни одного слона, но при этом все клетки на границе были побиты? Ответ обоснуйте.*



К условию задачи 6.6

Решение. Слон на шахматной доске ходит по клеткам одного цвета. Так как слон должен стоять не у края доски, он может делать ходы во все 4 стороны по диагонали. Это значит, что он может побить до 4 клеток одинакового цвета на границе доски. На границе доски $64-36=28$ клеток, из которых 14 чёрных и 14 белых. Следовательно, чтобы побить все чёрные клетки, необходимо не менее 4 слонов, и чтобы побить белые – тоже не менее 4 слонов.

Пример:



К условию задачи 6.6

Ответ: 8 слонов.

5.1. *Мартовский Заяц решил вести посекундную хронологию чаепития. Он, в частности, записал, что Болванщик налил себе очередную чашку чая спустя 20 999 секунд с начала ведения отсчёта. Записал он и время (также в секундах), когда Болванщик её осушил. Алиса с удивлением заметила, что оба записанных Зайцем числа обладают свойством: никакой перестановкой цифр в них не удаётся получить меньшее число (Алиса знает, что ноль первой цифрой числа быть не может). Какое наименьшее время Болванщик мог пить свою чашку чая? Ответ обоснуйте.*

Решение. Назовём число *хорошим*, если его нельзя уменьшить никакой перестановкой цифр. Тогда нам необходимо найти наименьшее хорошее число большее, чем 20 999. Заметим, что число 22 222 является хорошим, и оно больше 20 999. Покажем, что оно искомое, т. е., не существует хорошего числа в интервале от 20 999 до 22 222. Пусть такое число нашлось, тогда его первая цифра 2, а вторая не 0. Если в этом числе встречается 1, то поменяв её местами с первой цифрой, получим меньшее число, что противоречит определению хорошего числа. Итак, в числе единиц нет. Также, если среди цифр числа есть 0, то мы уменьшим число, поменяв этот 0 со второй цифрой. Значит, все цифры числа не меньше 2. Но таких чисел в рассматриваемом интервале нет. Значит, минимальное время, в которое Болванщик осушил свою чашку чая, 22 222, и чашка была им выпита за $22\,222 - 20\,999 = 1\,223$.

Примечание. Число является хорошим только в том случае, когда его ненулевые цифры идут в неубывающем порядке: иначе в нём встретятся есть две такие цифры, что меньшая из них стоит правее, и поменяв их местами мы число уменьшим. Кроме того, если в хорошем числе встречается 0, то 0 стоит и на втором слева месте тоже: если на втором месте другое число — поменяем его местами с каким-нибудь нулём. Можно доказать, что этих двух условий достаточно для того, чтобы число было хорошим.

Ответ: 1 223 секунды или 20 минут 23 секунды.

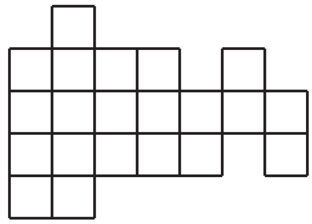
5.2. *Гермиона варила волшебное зелье из воды и корней мандрагоры. Когда зелье приготовилось, Гермиона достала из зелья половину корней мандрагоры, после чего уровень зелья в котле понизился на треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень зелья в котле, если достать половину оставшихся корней мандрагоры? Ответ обоснуйте.*

Решение. При извлечении половины корней уровень зелья понизился на треть, значит, половина корней составляет эту треть, а все корни — две трети. Итого перед извлечением корней, корни составляли две трети зелья, и еще треть всего зелья составляла вода. Значит, теперь корней и воды поровну. Половина оставшихся корней тогда составляет четверть всего оставшегося зелья; на столько же и понизится его уровень, если эту половину извлечь.

Ответ: На четверть.

5.3. *Чтобы пульт от телевизора заработал, необходимо вставить в него 2 рабочие батарейки. Среди 8 батареек есть 5 рабочих и 3 нерабочих. Как за четыре попытки (попыткой называется проверка включает ли пульт телевизор, когда в нём две какие-то батарейки) можно гарантированно включить телевизор?*

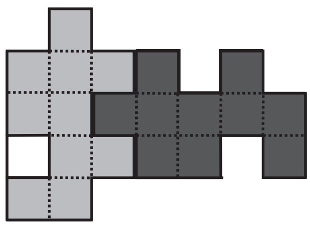
Решение. Разобьём все батарейки на пары $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$, и поочередно каждую из пар протестируем. Так как нерабочих батареек 3, а пар 4, найдется пара, в которой обе батарейки рабочие, а значит телевизор заработает.



К условию задачи 5.4

5.4. *Величайший монах утверждает, что за годы медитаций смог закрасить одну клетку на фигуре, изображенной справа, и не закрашенную часть фигуры разрезать (по линиям сетки) на две равные части. Повторите и вы достижение величайшего монаха.*

Решение. См. рисунок.



5.5. *Поверхность стола расчерчена на 9 клеток-квадратов, в которые записаны цифры так, как показано на рисунке. Дрессированный таракан ходит по столу, переползая с клетки на соседнюю по стороне клетку, но не посещая одну и ту же клетку дважды. Если таракан не может перейти больше ни в какую клетку, он останавливается (начинать свой путь таракан может из любой клетки). Дрессировщик Коля* *записывает (последовательно и без пробелов) цифры из клеток, в которых таракан побывал, и в итоге получает многозначное число.*

а) Покажите, как ходить таракану по доске, чтобы число записанное Колей, было больше, чем 93 876 245. *(2 балла)*

б) Найдите наибольшее число, которое может записать Коля. Ответ обоснуйте. (5 баллов)

1	*9*	*3*
4	*2*	*8*
5	*6*	*7*

К условию задачи 5.5

Решение. Решим сразу пункт «б», для чего раскрасим клетки поверхности стола в шахматном порядке (угловые клетки в чёрный цвет). Тогда таракан ходит с чёрной на белую клетки и с белой на чёрную. У нас 5 чёрных и 4 белых, тогда чтобы получить наибольшее возможное число (оно должно быть девятизначным) нам необходимо посетить все клетки, поэтому начинать надо с чёрной. И, если такая возможность есть, следует каждый раз переходить в клетку с наибольшим числом. В нашем случае это оказывается возможным. Мы начинаем с клетки с цифрой 7, и действуя по описанной схеме, получим число 783 926 541.

Ответ: б) 783 926 541.

5.6. *Три брата Илья, Кирилл и Павел отправились из дома к бабушке. Первым вышел Илья, затем Кирилл и последним Павел. В течение пути братья неоднократно обгоняли друг друга. Илью обгоняли или он обгонял кого-то из братьев суммарно* 4 *раза. Павел принял участие ровно в 8 обгонах. В итоге к бабушке все трое пришли в разное время, причём Кирилл оказался у неё раньше Ильи. В каком порядке ребята прибыли к бабушке? Ответ обоснуйте.*

Решение. Илья оказался впереди Кирилла, значит, у них обгонов друг с другом было нечётное количество. Так как Илья поучаствовал в 4 обгонах (чётное количество), у него было нечётное количество обгонов с Павлом. Это значит, что порядок Ильи и Павла тоже поменялся. Кроме того, Павел участвовал в 8 обгонах всего, в нечётном их количестве с Ильёй, поэтому с Кириллом у него было тоже нечетное число обгонов, из чего следует, что Павел и Кирилл тоже поменялись порядком. Значит Павел первый, Кирилл второй, Илья третий.

Ответ: Павел, Кирилл, Илья