11 класс

11.1. Разбейте множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ на 25 пар так, что суммы чисел в парах образуют ряд из последовательных 25 натуральных чисел.

11.2. У двух сестёр дома с первого января висит отрывной календарь, на каждом листе которого напечатан рецепт одного блюда. Каждый день сёстры отрывают очередной листок и изучают рецепт на нём. Если это рецепт десерта, листок забирает себе старшая сестра, если рецепт салата — младшая сестра, а если рецепт любого другого блюда, листок выбрасывается. К первому февраля оказалось, что наименьшее общее кратное всех чисел — номеров дней — на листках младшей сестры равно наименьшему общему кратному всех номеров на листках старшей. Какое наименьшее количество листков календаря могло быть на этот момент выброшено? Ответ обоснуйте.

К условию задачи 11.2

11.3. Две окружности пересекаются в точках A и C. Касательная в точке A к первой окружности пересекает вторую окружность в точке $B \neq A$. Касательная в точке C ко второй окружности пересекает первую окружность в точке $D \neq C$. Точки M и N — середины AB и CD соответственно. Известно, что прямые AB и CD не параллельны. Докажите, что длина отрезка MN не меньше расстояния от точки A до прямой CD.

11.4. Некоторый деревянный куб помещён в объединение двух шаров единичного радиуса. При какой наибольшей длине ребра куба это возможно? Ответ обоснуйте.

11.5. Пусть L — лежащая в первой четверти часть графика параболы $y = -x^2 - px + q$ (числа p и q — положительные). Тогда любая прямая, касающаяся кривой L (в некоторой точке N), отсекает от первого координатного угла прямоугольный треугольник. Обозначим его через Δ_N.

а) Докажите, что существует единственное число $b_0 > 0$, при котором график функции $y = \dfrac{b_0}{x}$ имеет с L ровно одну общую точку. (Далее обозначим гиперболу — график этой функции — через Γ, а общую точку — через N^*). (3 балла)

б) Докажите, что любая касательная к кривой L имеет хотя бы одну общую точку с Γ. (2 балла)

в) Докажите, что для графика функции $y = \dfrac{b}{x}$ отрезок любой ее касательной, заключённый между осями координат, делится точкой касания пополам, а площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от выбора касательной. (2 балла)

г) Докажите, что площадь треугольника Δ_{N^*} меньше, чем площадь любого другого треугольника Δ_N. (4 баллов)

д) Докажите, что если лежащая на L точка N является серединой гипотенузы треугольника Δ_N, то $N = N^*$. (3 балла)

10 класс

10.1. Безумный Шляпник сделал странные часы. Минутная стрелка у них неподвижна, а циферблат и часовая стрелка вращаются так, что часы всегда показывают правильное время. Безумный Шляпник уже сутки наблюдает за часовой стрелкой этих часов. Сколько оборотов за сутки сделала эта стрелка? Ответ обоснуйте.

10.2. Решите уравнение
$$(\cos x + \cos \pi x)^2 = 4.$$

10.3. На плоскости проведена прямая l и по одну сторону от неё отмечены точки A и B. Требуется разбить прямую l точкой P на два противоположно направленных луча (с началом в точке P) так, чтобы угол, образованный одним из этих лучей с лучом PA, был вдвое больше угла, образованного вторым лучом с лучом PB. С помощью циркуля и линейки постройте точку P.

10.4. Найдите все тройки натуральных простых чисел a, b, c, для которых $ab-1$ кратно c, $bc-1$ кратно a, $ac-1$ кратно b.

10.5. Имеется n кучек камней; количество камней в i-ой кучке равно a_i (все числа a_i натуральные). Два игрока по очереди забирают камни из кучек. При этом за ход разрешается брать камни только из одной (любой) кучи, в количестве либо 3, либо 5. Проигрывает тот из игроков, кто не сможет сделать ход.

а) Кто из игроков, начинающий или его противник, имеет выигрышную стратегию, если $n = 2022$ и во всех кучках поровну камней? (2 балла)

б) Докажите, что результат игры (при наилучших действиях сторон) не изменится, если изначально в некоторые кучки добавить по 8 камней. (3 балла)

в) Пусть $a_1 = 2022$. Может ли измениться результат игры (при наилучших действиях сторон), если изначально, не изменяя числа камней в остальных кучках, в первую кучку положить на один камень больше? (4 балла)

г) Пусть $a_i = i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. При каких натуральных n из отрезка $2021 \leqslant n \leqslant 2030$ противник начинающего имеет выигрышную стратегию? (5 баллов)

Ответы ко всем пунктам обоснуйте.

9 класс

9.1. Существуют ли различные натуральные числа n, m такие, что уравнения

$$x^{n+1} + x^n + 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^{m+1} + x^m + 1 = 0$$

имеют одинаковый корень?

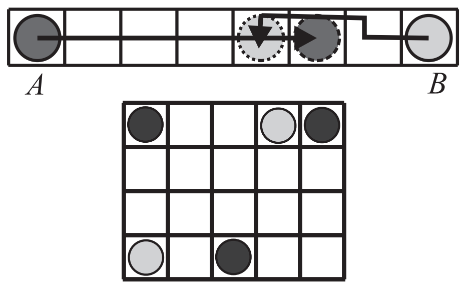
9.2. 50 натуральных чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Буратино представил каждый член этой прогрессии в виде суммы двух натуральных чисел. Оказалось, что среди получившихся 100 слагаемых встречаются все натуральные числа от 1 до 100. Каким числом может быть разность прогрессии?

9.3. Для натуральных n обозначим $K(n) = \text{НОК}(1, 2, 3, \ldots, n)$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что

$$K(n) \cdot K(n+2) = K^2(n+1).$$

9.4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) длина высоты AH равна радиусу описанной окружности треугольника ABC. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Биссектриса треугольника ABC, проведённая из вершины A, пересекла сторону BC в точке D, а прямая DO пересекла сторону AB в точке E. Докажите, что $HE = AH$.

9.5. Имеется клетчатая доска размером $N \times M$ клеток. В некоторых её клетках стоят чёрные или белые фишки (не более, чем по одной фишке в клетке). *Рокировкой* называется следующая операция. На доске выбираются две клетки A и B, находящиеся на одной линии (горизонтальной или вертикальной), но не соседние, и такие, что на клетках A и B стоят фишки разных цветов, а между A и B фишек нет. Затем фишка с клетки A (назовем ее *начинающей рокировку*) переставляется на любую клетку между A и B, а фишка с клетки B «перепрыгивает» первую фишку и ставится на соседнюю с ней клетку. (см. верхний рисунок).



К условию задачи 9.5

а) Имеется следующая расстановка фишек (см. нижний рисунок). Можно ли несколькими рокировками переставить белую фишку из левого нижнего угла в правый верхний? (1 балл)

Может ли случиться так, что некоторая расстановка фишек после нескольких рокировок совпадёт с изначальной, если:

б) $M = 1$; (4 балла)

в) начинать рокировки могут только белые фишки; (5 баллов)

г) дополнительных ограничений нет. (4 балла)

8 класс

8.1. Последовательные целые числа a и b таковы, что уравнения $ax^2 + bx + 1 = 0$ и $bx^2 + ax + 1 = 0$ имеют общий корень. Найдите все возможные значения a и b.

8.2. На математической олимпиаде участникам предлагалась такая задача: «Петя задумал три различные цифры, не равные 0. Затем он всеми возможными способами составил из этих цифр трёхзначные числа без повторяющихся цифр. Сумма всех этих чисел оказалась равна N. Какие три цифры задумал Петя?» Ввиду неисправности принтера число N не пропечаталось. Определите, какие значения оно могло принимать, если известно, что задача имела единственный ответ.

8.3. В остроугольном треугольнике ABC высота AH и медиана BK пересекаются в точке M. Известно, что $AM = BM$ и $BH = HK$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

8.4. В клубе состоит тысяча человек. Известно, что каждый из них имеет в этом клубе по меньшей мере одного знакомого. Время от времени в клуб могут вступать новые участники, а действительные члены клуба — знакомиться друг с другом. Уже знакомые участники не перестают быть знакомы ни при каких обстоятельствах, а при выходе из клуба считается хорошим тоном соблюдать следующие правила: во-первых, на момент выхода человеку следует иметь среди участников клуба не менее трех знакомых; во-вторых, выходящий проводит церемонию, в ходе которой все его знакомые члены клуба собираются в хоровод, причем соседи по хороводу изначально незнакомы и знакомятся в ходе церемонии. Докажите, что если все будут соблюдать хороший тон, то в клубе никогда не окажется меньше тридцати участников.

8.5. Жулик загадал n-значное число, все цифры в котором различны, и предлагает Телепату его отгадывать, последовательно называя n-значные числа, все цифры в которых различны. В ответ на каждое число, названное Телепатом (попытка), Жулик считает, сколько в этом числе *быков* (определение ниже), сколько в нём *коров* и должен сообщить эту информацию вслух.

Бык — это цифра числа, которая совпадает со стоящей в том же разряде цифрой загаданного числа; *корова* — это цифра числа, которая есть также и в загаданном числе, но стоит там в другом разряде. Например, если загадано число 1023, а названо 1234, то 1 — это бык, 2 и 3 — коровы. В этом случае Жулик должен сказать: 2 коровы и 1 бык.

Телепат знает загаданное Жуликом число, а также знает, что Жулик мухлюет: всегда называет неправильное число быков и неправильное число коров. Телепат хочет сыграть так, чтобы наблюдающий за игрой Идеальный Логик, не зная загаданного числа, убедился в том, что Жулик не всегда говорит правду. Хватит ли Телепату для этого m попыток, если

а) $n = 2,\ m = 1$? (1 балл)
б) $n = 3,\ m = 2$? (2 балла)
в) $n = 4,\ m = 3$? (3 балла)
г) $n = 5,\ m = 4$? (4 балла)
д) n — произвольное целое число от 2 до 10, $m = 10^{10}$? (4 балла)

(Известно, что Телепат может продолжать свои попытки даже в случае ответа «n быков, 0 коров.»)

7 класс

7.1. Семён забыл взять часы, поэтому спросил у Николы: «Который час?» Никола ответил: «Если сложить четверть времени, прошедшего с последнего полудня, и половину времени, оставшегося до следующего полудня, то как раз получится текущее время». Помогите Семёну подсчитать, сколько же сейчас времени. (Известно, что разговор происходил не в полдень.)

7.2. Можно ли покрасить все клетки квадрата 8×8 в чёрный и белый цвета так, чтобы в любом прямоугольнике внутри него, состоящем из трёх или большего числа клеток, количества клеток чёрного и белого цвета отличались ровно на 1 или на 2? Ответ обоснуйте.

7.3. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, т. е. шестиугольник, все стороны которого равны между собой, а все внутренние углы составляют $120°$. Прямые AC и DE пересекаются в точке K. Докажите, что C — середина отрезка AK.

7.4. В пяти одинаковых мешочках лежат по 15 монет. В первом мешочке 15 золотых монет, во втором — 15 серебряных, в третьем — 15 бронзовых, в четвёртом и пятом — по 5 золотых, серебряных и бронзовых монет. Алексей может наугад доставать монеты из любых мешочков, при этом он не видит, какие монеты остались в мешочке (извлечённые монеты он, конечно, видит). При каком наименьшем суммарном количестве извлечённых монет Алексей сможет наверняка определить содержимое хотя бы одного мешочка? Ответ обоснуйте.

7.5. Дано натуральное число $k > 1$. На столе лежат $2k$ карточек с натуральными числами от 1 до $2k$ включительно, по одному числу на карточке. Все карточки разложены в две кучи А и Б, причём количество карточек в кучах не обязательно одинаковое, но сумма чисел на всех карточках в А равна сумме чисел на всех карточках в Б.

а) Докажите, что число k чётно (т. е. число карточек делится на 4). (2 балла)

б) Пусть в А и Б поровну карточек. Известно, что из А можно выбрать две карточки, сумма чисел на которых равна $2k+1$. Докажите, что и из Б можно выбрать две карточки с такой же суммой. (3 балла)

в) Найдите какое-нибудь $k > 1$ и такие кучи А и Б, что из А и из Б нельзя выбрать по паре карточек с одинаковой суммой. (4 балла)

г) Пусть карточки разложены так, что из А и из Б нельзя выбрать по паре карточек с одинаковой суммой. При этом карточка с числом 1 лежит в куче А. Докажите, что сумма чисел на любых двух карточках из А меньше суммы чисел на любых двух карточках из Б. (5 баллов)

6 класс

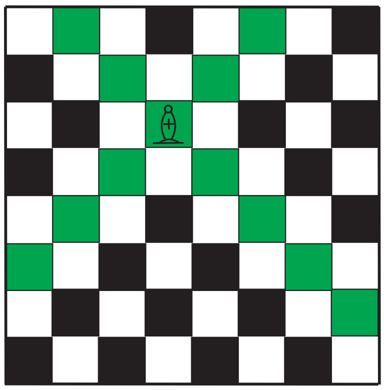
6.1. В торговой компании работали 2022 человека. После раскрытия мошеннической схемы все сотрудники уволились по очереди один за другим. Каждый из них, уходя, гордо заявил: «Я не хочу работать с мошенниками. Но я рад, что в компании ещё остались сотрудники, которые всегда говорят только правду». Сколько сотрудников компании на самом деле всегда говорят правду? Ответ обоснуйте.

6.2. В трёх ящиках лежат фрукты. Сначала Петя переложил одну пятую часть фруктов из первого ящика и одну шестую часть фруктов из второго ящика в третий. Потом Петя переложил по одной седьмой части фруктов, лежащих в третьем ящике, в первые два. После всех этих перекладываний количество фруктов в каждом ящике оказалось равным изначальному. Докажите, что в первом и третьем ящике поровну фруктов.

6.3. Мальвина дала задачу для Буратино: «Найди два числа: четырёхзначное A и трёхзначное B такие, что их сумма равна 2022. При этом, если в числе A поменять местами две цифры, то сумма станет равна 2202. А если после этого поменять местами две цифры ещё и в числе B, то сумма станет равна 2220». Помогите Буратино найти хотя бы одну пару таких чисел A и B.

6.4. Известно, что число 202 220 220 002 022 002 022 является произведением пяти различных простых чисел. Найдите наибольшее среди этих пяти чисел. Ответ обоснуйте.

6.5. В волейбольном турнире участвовало несколько команд. Каждая команда должна была сыграть с каждой по одному матчу. Однако во время турнира в двух командах обнаружились больные коронавирусом — эти команды были сняты с турнира досрочно. (Остальные команды доиграли турнир до конца.) Известно, что обе снятых команды сыграли поровну матчей, а во всём турнире было проведено 24 матча. Успели ли снятые команды сыграть матч друг против друга? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 6.6

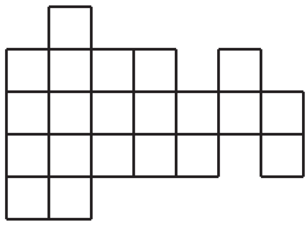
6.6. Шахматная фигура «слон» бьёт по диагонали на любое количество клеток — см. рисунок. Какое наименьшее количество слонов нужно поставить на пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы на границе доски не было ни одного слона, но при этом все клетки на границе были побиты? Ответ обоснуйте.

5 класс

5.1. Мартовский Заяц решил вести посекундную хронологию чаепития. Он, в частности, записал, что Болванщик налил себе очередную чашку чая спустя 20 999 секунд с начала ведения отсчёта. Записал он и время (также в секундах), когда Болванищик её осушил. Алиса с удивлением заметила, что оба записанных Зайцем числа обладают свойством: никакой перестановкой цифр в них не удаётся получить меньшее число (Алиса знает, что ноль первой цифрой числа быть не может). Какое наименьшее время Болванщик мог пить свою чашку чая? Ответ обоснуйте.

5.2. Гермиона варила волшебное зелье из воды и корней мандрагоры. Когда зелье приготовилось, Гермиона достала из зелья половину корней мандрагоры, после чего уровень зелья в котле понизился на треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень зелья в котле, если достать половину оставшихся корней мандрагоры? Ответ обоснуйте.

5.3. Чтобы пульт от телевизора заработал, необходимо вставить в него 2 рабочие батарейки. Среди 8 батареек есть 5 рабочих и 3 нерабочих. Как за четыре попытки (попыткой называется проверка включает ли пульт телевизор, когда в нём две какие-то батарейки) можно гарантированно включить телевизор?



К условию задачи 5.4

5.4. Величайший монах утверждает, что за годы медитаций смог закрасить одну клетку на фигуре, изображенной справа, и не закрашенную часть фигуры разрезать (по линиям сетки) на две равные части. Повторите и вы достижение величайшего монаха.

1	*9*	*3*
4	*2*	*8*
5	*6*	*7*

К условию задачи 5.5

5.5. Поверхность стола расчерчена на 9 клеток-квадратов, в которые записаны цифры так, как показано на рисунке. Дрессированный таракан ходит по столу, переползая с клетки на соседнюю по стороне клетку, но не посещая одну и ту же клетку дважды. Если таракан не может перейти больше ни в какую клетку, он останавливается (начинать свой путь таракан может из любой клетки). Дрессировщик Коля записывает (последовательно и без пробелов) цифры из клеток, в которых таракан побывал, и в итоге получает многозначное число.

а) Покажите, как ходить таракану по доске, чтобы число записанное Колей, было больше, чем 93 876 245. (2 балла)

б) Найдите наибольшее число, которое может записать Коля. Ответ обоснуйте. (5 баллов)

5.6. Три брата Илья, Кирилл и Павел отправились из дома к бабушке. Первым вышел Илья, затем Кирилл и последним Павел. В течение пути братья неоднократно обгоняли друг друга. Илью обгоняли или он обгонял кого-то из братьев суммарно 4 раза. Павел принял участие ровно в 8 обгонах. В итоге к бабушке все трое пришли в разное время, причём Кирилл оказался у неё раньше Ильи. В каком порядке ребята прибыли к бабушке? Ответ обоснуйте.