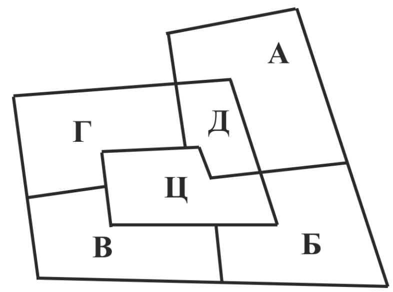
XXIV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2025
10-11 класс

10-11.1. Решите систему в действительных числах:

$$\sqrt[4]{3}(a+b+c)=\sqrt{45},\ a^2+b^2+c^2=45\sqrt{3},\ \sqrt[4]{3}(a^3+b^3+c^3)=45\sqrt{15},\ a^4+b^4+c^4=2025.$$

10-11.2. На рисунке справа изображены 11 подобных шестиугольников. Шесть из них — **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Ц** — не пересекаются, а остальные пять — **Д**$\cup$**Ц**, **Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц**, **В**$\cup$**Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц**, **Б**$\cup$**В**$\cup$**Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц**, **А**$\cup$**Б**$\cup$**В**$\cup$**Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц** — являются объединениями этих шести. Рисунок был специально искажён, отрезки в нем были чуть повёрнуты и растянуты, но это не мешает считать, что в каждом из этих шестиугольников один угол больше развернутого, а остальные — меньше. Докажите, что а) в шестиугольнике **Ц** все углы, кроме одного, прямые; б) левые стороны шестиугольников **А** и **Б** лежат на одной прямой.



10-11.3. Даны какие-то действительные числа a, b, c, d. Известно, что сумма $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x$ неотрицательна при любом действительном x. Найдите a, b, c, d.

10-11.4. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная в пространстве. Известно, что нет плоскости, которая содержала бы её всю. Верно ли, что всегда найдется не содержащая ни одного её звена плоскость, которая разрежет эту ломаную а) не меньше, чем на четыре части; б) ровно на четыре части?

10-11.5. Даны натуральные числа a, b и простое число d такие, что a^2+b^2 делится на d и числа a и b взаимно просты. Докажите, что для каких-то натуральных $k, i < d$

а) из того, что Na^2 и Nb^2 делятся на d для какого-то натурального N, следует, что и N делится на d; (2 балла)

б) число $k^2a^2 - i^2b^2$ тоже делится на d; (5 баллов)

в) число k^2+i^2 делится на d; (3 балла)

г) выполнено $k^2+i^2=d$. (4 балла)

XXIV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2025

9 класс

9.1. В ряд записали числа: сначала все нечётные от 1 до 2025 (по возрастанию), а затем все чётные от 2024 до 2 (по убыванию). Сколько чисел делятся на номер своей позиции в этом ряду?

9.2. Заяц и черепаха устроили забег по круговой тропинке. Они стартуют одновременно из одной точки в одном направлении, каждый — со своей постоянной скоростью. Заяц быстрее черепахи. Каждый раз, когда заяц и черепаха встречались в одной точке, черепаха мгновенно разворачивалась и с той же постоянной скоростью двигалась в противоположном направлении. Когда черепаха впервые вернулась на точку старта, заяц встретил её в 209-ый раз. Во сколько раз скорость зайца больше скорости черепахи?

9.3. Даны положительные числа a и b. Известно, что существует треугольник со сторонами $1, a, 2a^2$ и существует треугольник со сторонами $1, b, 2b^2$. Докажите, что существует треугольник со сторонами a, b, ab.

9.4. а) Дима решил покрасить некоторые клетки бесконечной во все стороны клетчатой доски в три цвета — красный, синий, зелёный. Он хочет, чтобы в каждой горизонтальной полоске 1×3 была хотя бы одна красная клетка, в каждой вертикальной полоске 1×3 была хотя бы одна синяя клетка, а в каждом квадрате 2×2 была хотя бы одна зелёная клетка. Докажите, что на раскрашенной по таким правилам бесконечной клетчатой доске не будет незакрашенных клеток. (3 балла)

б) Теперь Дима взял квадрат 30×30 и решил покрасить какие-то его клетки в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в этом квадрате выполнялись условия, описанные выше. Может ли он осуществить эту задачу, не покрасив ровно 75 клеток? (4 балла)

9.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC\,(AB > AC)$ проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, точка M — середина стороны BC, точки B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1 соответственно, не совпадающие с точкой пересечения высот ABC. Точка P — основание перпендикуляра, проведённого из вершины A к прямой B_1C_1.

а) Докажите, что $\angle A_1AC = \angle PAC_1$; (2 балла)

б) Докажите, что точки M, A_1, B_2, C_2 лежат на одной окружности; (2 балла)

в) Пусть точка X симметрична точке B относительно точки A_1, а точка Y — симметрична точка B_1 относительно точки P. Докажите, что треугольники AB_1X и ABY равны; (3 балла)

г) Докажите, что точки A_1 и P симметричны относительно прямой B_2C_2; (4 балла)

д) Докажите, что треугольник PB_2C_2 подобен треугольнику ABC. (3 балла)