РЕШЕНИЯ

5 класс

5.1. *В классе учатся две девочки: Алла и Белла. В феврале было 15 уроков математики. Алла пропустила первые два урока из-за олимпиады, а потом, посетив 7 уроков подряд, заболела ветрянкой. Белла после отдыха с родителями честно посетила 8 уроков подряд, но три урока в конце пропустила, потому что уехала на соревнования. На скольки уроках математики была ровно одна из этих девочек?*

Решение. Алла посетила уроки с номерами 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. А Белла — уроки с номерами 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6 и 5. Как видно, ровно один раз были посещены уроки 3, 4, 10, 11 и 12. Итого 5 уроков.

Ответ. 8 уроков.

5.2. *Петя решил побаловаться с лифтом: он зашёл в него на 4-ом этаже и после этого умножал на 2025 номер этажа, на котором находится, находил предпоследнюю цифру результата и ехал на этаж с этим номером. Если полученная цифра ноль, то Петя ехал на 10-ый этаж. На каком этаже будет Петя спустя 100 поездок?*

Решение. $4 \times 2025 = 8100$, то есть лифт первую поездку совершит на 10 этаж. Потом на $2025 \times 10 = 20250$, то есть на 5 этаж. С пятого этажа он поедет на $2025 \times 5 = 10025$, то есть третья поездка будет на второй этаж, а потом — снова на пятый ($2025 \times 2 = 4050$). Поскольку предпоследняя цифра строго определяет последующую, возникает цикл из 2-го и 5-го этажей, чётные поездки которого приводят нас на 5 этаж.

Ответ. На пятом этаже.

5.3. *Пираты Билли, Генри и Джонни нашли клад и разделили его на 3 части. Билли досталась половина монет от той части клада, которая досталась Генри и Джонни вместе. Генри досталась треть монет от той части клада, которая досталась Билли и Джонни вместе. А Джонни досталось 60 монет. Сколько всего монет содержал клад?*

Решение. Если Билли получил одну часть монет, то остальные пираты получили две части монет. Получается, всего пираты делили три части монет, и у Билли $1/3$ всех монет. Если Генри получил одну часть монет, то остальные пираты получили три части монет, и всего у пиратов 4 части монет, а у Генри $1/4$ всех монет. Получается, что у Джонни $1-1/3-1/4 = 5/12$ всех монет. А по условию их 60. Поэтому, если поделить весь клад на 12 частей, то 5 из них составляют 60 монет. Значит одна часть — это 12 монет, а все 12 частей — 144 монеты.

Ответ. 144 монеты.

5.4. *Существует ли четырёхзначное, трёхзначное, двузначное и однозначное число, в записи которых используются все цифры, а сумма этих чисел равна 2025?*

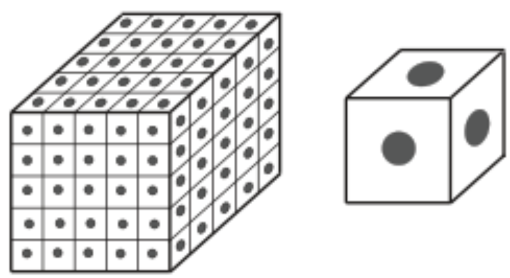
Решение. Существует. Например, 1024+937+58+6=2025.

5.5. *На дискотеку пришли 2025 человек, каждый из которых, являлся либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжет. По окончанию дискотеки люди по очереди начали уходить. Выйдя с танцпола каждый произносил фразу: "На танцполе осталось 2 лжеца". Сколько лжецов было изначально, если с дискотеки ушли все?*

Решение. Последний уходящий точно сказал неправду. А значит, он был лжецом. После того, как ушёл предпоследний человек, остался ровно один лжец. А значит, уходящий был также лжецом. Если перед ними хоть раз уходил лжец, то последний из уходящих лжецов явно сказал правду. Получается, что кроме остающихся двух лжецов, других быть не могло.

Ответ. 2 лжеца.

5.6. *Кубик* $5 \times 5 \times 5$ *составлен из 125 кубиков* $1 \times 1 \times 1$*. На каждой грани каждого из кубиков* $1 \times 1 \times 1$ *нарисована одна точка (см. рис.). Женя удалила 11 кубиков* $1 \times 1 \times 1$ *так, что оставшаяся часть исходного кубика представляла собой один цельный кусок. После этого Женя запустила по кубику ручного таракана Сашу, который обошел всю поверхность получившейся фигуры и посчитал количество точек, до которых он может доползти. Какое наименьшее количество точек мог насчитать ручной таракан Саша?*



Решение. Оценка. Изначально у нас указанная сумма равна $6 \times 25 = 150$. Чтобы эта сумма стала меньше необходимо, чтобы хотя бы одна линия (то есть, пять кубиков в высоту, ширину или глубину) перестали существовать, и ни на одной из оставшихся линий не добавилось ещё отдельно стоящих кубиков. Поскольку три линии включают в себя не менее, чем $1+3 \times 4 = 13$ кубиков, то убрать мы могли не более двух линий и, соответственно, осталось не менее $6 \times 25 - 4 = 146$ точек.

Пример. Берём угловой кубик, убираем длину и ширину, содержащие этот кубик, а из ряда в глубину, его содержащего, убираем ещё два ближайших к выбранному углу кубика. Несложно видеть, что в данном случае все оценки из предыдущего пункта дают равенство.

Ответ. 146 точек.

6 класс

6.1. *После просмотра ужастика на ночь Петя сказал Саше: "Как хорошо, что в этом месяце 4 воскресенья и у нас не будет пятницы 13!". На что Саша возразил: "В этом месяце действительно 4 воскресенья, но пятница 13 будет!". Могли ли слова Саши оказаться правдой?*

Решение. Могло. Если месяц февраль невисокосного года и 1 февраля — воскресенье, то в месяце будет 4 воскресенья и пятница 13.

6.2. *У Пети есть 30 различных солдатиков. Он решил сформировать из них разные отряды. Сначала он распределил их в отряды по 4 солдатика (двое солдатиков остались в сторонке), потом по 5 солдатиков, потом по 6 солдатиков, потом по 7 солдатиков (двое остались в сторонке) и так далее. В последний раз он распределил их в отряды по 13 солдатиков (четверо остались в сторонке). Могло ли так случиться, что каждый солдатик оказался по крайней мере в 9 отрядах? Солдатики, остающиеся в сторонке, отрядами не считаются.*

Решение. Предположим, что такое могло случиться. Давайте выпишем, сколько солдатиков оставалось в сторонке: $2+2+6+3+8+6+4=31$. Всего распределений на отряды было 10, значит каждый из солдатиков не участвовал ни в каком отряде максимум в одном распределении. Но всего не участвовало в отрядах суммарно 31 солдатиков, значит какой-то из солдатиков не участвовал в распределении на отряды хотя бы два раза. Противоречие.

Ответ. Не могло.

6.3. *Гарри и Рон нашли квадрат 1×1. Заклинанием "увеличикус!" они могут по своему выбору увеличить либо ширину, либо длину прямоугольника на 1. Ребята по очереди колдуют "увеличикус!" (первым колдует Гарри). Тот, после чьего хода образуется квадрат, или образуется прямоугольник со стороной, большей 2025, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?*

Решение. Первый ход: Гарри делает прямоугольник 2×1. Чтобы не проиграть, Рон обязан делать прямоугольник 3×1. Пусть перед ходом Гарри имеется прямоугольник $(m+2) \times m$, тогда Гарри делает своим ходом делает прямоугольник $(m+2) \times (m+1)$. В свой ход Рон, чтобы не проиграть, обязан делать прямоугольник $(m+3) \times (m+1)$. Таким образом Гарри снова может сделать ход по своей стратегии и не проиграет.

Ответ. Выигрывает Гарри.

6.4. *Два мастера, работая с одинаковой производительностью, выполняют дневную норму, работая с 10:00 до 18:00. Перед новым рабочим днём одного из мастеров укусил за бочок волчок, что понизило его производительность в полтора раза. В 15:00 нового рабочего дня второй мастер заметил, что его напарник работает медленнее, и решил ускориться. Во сколько раз второй мастер должен увеличить производительность, чтобы они смогли выполнить свою дневную норму к 18:00?*

Решение. Пусть скорость выполнения работы у рабочих в час равна v, а вся работа равна 1, тогда обычный рабочий день 8 часов и $8v + 8v = 16v = 1$. Замедлившись в полтора раза, первый рабочий вместо $8v$ выполняет работу равную $\frac{16}{3}v$, второй рабочий за 3 часа выполнит работу $3v$. Пусть x — во сколько раз должен быстрее работать второй рабочий. Тогда, за оставшиеся 3 часа он выполнит $3vx$, что должно быть равно $3v + 8v - \frac{16}{3}v = \frac{17}{3}v$. От куда $3vx = \frac{17}{3}v$, значит $x = \dfrac{17}{9}$.

Ответ. В $\dfrac{17}{9}$ раз.

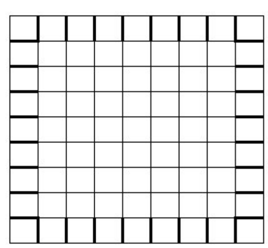
6.5. *У начинающего инвестора Евдокима есть 2 банковских счёта. На одном из них находится 2024 рубля, на другом — 2025. За одну операцию Евдоким может снять произвольную целую сумму рублей с одного из счетов и увеличить другой счёт с помощью своих личных сбережений на сумму, в два раза большую, чем он снял. Может ли он такими операциями получить на каждом из счетов по миллиону рублей?*

Решение. Пусть Евдоким снял со счёта a рублей, тогда второй счёт увеличится на $2a$, но это значит, что разность между двумя счетами изменится на $3a$. Разность между счетами каждый раз меняется на число, кратное трём, значит остаток при делении на 3 у разности счетов не меняется. Изначально остаток равен 1, а мы хотим, чтобы он стал равен 0. Следовательно, такое сделать не удастся.

Ответ. Не может.

6.6. *У Пети есть клетчатый квадрат* 9×9. *За одну операцию он может выбрать любой клетчатый квадрат и обвести его границу розовым цветом. За какое наименьшее количество операций Петя сможет сделать все линии сетки квадрата розовыми? Проводить линии за пределами исходного квадрата запрещено.*

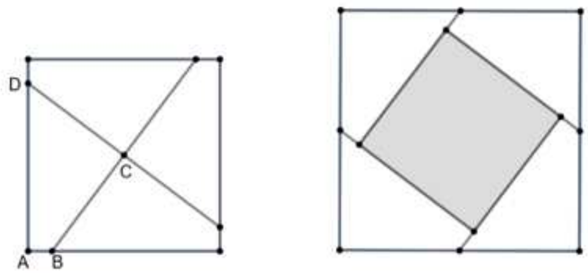
Решение. Оценка. Выделим отрезки длины 1 так, как показано на рисунке. Всего отрезков 32, каждый из квадратов может покрыть не более, чем 2 отрезка, значит квадратов не меньше, чем 16.



Пример. Рассмотрим угловые квадраты, содержащие центральную клетку, отличные от исходного квадрата. Таких квадратов 16 (по 4 с каждого угла). Несложно видеть, что каждый отрезок исходного квадрата покрыт каким-то из этих квадратов.

7 класс

7.1. *Используя 4 копии четырёхугольника $ABCD$, можно составить либо квадрат со стороной 8 см, либо квадрат со стороной 10 см, но с квадратной дыркой (см. рисунок). Найдите длины отрезков AB и AD.*



Решение. Суммарная площадь четырёх копий четырёхугольника на обоих рисунках одинакова, поэтому площадь дырки равна разности площадей квадратов, т.е. $10^2 - 8^2 = 36 = 6^2$ см^2. Сторона дырки равна стороне AD, укороченной на длину стороны AB. Сторона меньшего квадрата (на левой картинке) равна сумме длин сторон AD и AB. Получается система уравнений:

$$\begin{cases} AD - AB = 6 \text{ см}, \\ AD + AB = 8 \text{ см}, \end{cases}$$

решение которой: $AD = 7$ см, $AB = 1$ см.

Ответ. $AD = 7$ см, $AB = 1$ см.

7.2. *Семь последовательных натуральных чисел стоят в ряд в некотором порядке. Сумма трёх чисел слева равна 18, сумма трёх чисел справа равна 29. Чему равно число посередине?*

Первое решение. Обозначим последовательные числа за $x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3$ соответственно. Сумма всех семи чисел равна $7x$, то есть она делится на 7. Сумма шести упомянутых в условии чисел равна $18+29=47$. Оставшееся число должно дополнять эту сумму до числа, кратного 7. Тогда оно имеет вид $2+7k$, где $k \geqslant 0$ — целое число. Сумма всех чисел будет равна $49+7k$, тогда $x = 7+k$, наибольшее число в наборе равно $10+k$, наименьшее равно $4+k$. Рассмотрим несколько вариантов.

1) $k = 0$. Число посередине равно $2+7k = 2$, но наименьшее число в наборе равно $4+k = 4$. Противоречие.

2) $k = 1$. Число посередине равно $2+7k = 9$. Такое возможно, например, в расстановке $5, 6, 7, 9, 8, 10, 11$.

3) $k \geqslant 2$. Число посередине равно $2+7k$, но теперь оно больше наибольшего числа $10+k$, так как $6k > 8$. Противоречие.

Таким образом, единственный возможный случай — второй, а искомое число равно 9.

Второе решение. Среди трёх левых чисел есть число, не большее 5, иначе их сумма была бы не меньше $6+7+8 = 21 > 18$. Среди правых трёх чисел есть число, не меньшее 11, иначе их сумма была бы не больше $10+9+8=27<29$. Но так как числа последовательные, единственный возможный вариант — числа от 5 до 11. Тогда число посередине равно $(5+6+7+8+9+10+11)-18-29=9$. Возможная расстановка чисел — $5,6,7,9,8,10,11$.

Ответ. Посередине стоит число 9.

7.3. *Вдоль дороги расположено 4 деревни: А, Б, В и Г (именно в таком порядке). Расстояние от А до Б равно 7,5 км, а В расположена посередине между Б и Г. Также между Б и В есть обходная тропинка, по которой идти втрое дольше, чем по прямой. В полдень из деревни А в деревню Г вышли два туриста. Первый турист, дойдя до Б, пошёл по тропинке, а второй – по основной дороге. Оказавшись в В, первый вспомнил, что забыл в А важную вещь, и отправился назад в А по основной дороге, встретив второго туриста посередине между Б и В. В итоге первый турист вернулся в А в то же время, когда второй дошёл до Г. Найдите расстояние от А до Г по дороге. Скорости туристов неизменны.*

Решение. Обозначим за x расстояния между Б и В, В и Г. Можно считать, что длина тропинки равна $3x$. Тогда первый турист всего прошёл $7,5+3x+x+7,5=15+4x$ км, а за то же самое время второй прошёл $7,5+x+x=7,5+2x$ км, что ровно вдвое меньше, чем $15+4x$, то есть первый турист имеет вдвое большую скорость. До их встречи туристы прошли соответственно $7,5+3x+0,5x=7,5+3,5x$ и $7,5+0,5x$ км. Составив уравнение $7,5+3,5x=2(7,5+0,5x)$, находим $x=3$ км. Тогда искомое расстояние равно $7,5+2x=13,5$ км.

Ответ. От А до Г $13,5$ км.

7.4. *Какое наибольшее количество единиц может оказаться вместо звёздочек в записи девятизначного произведения*

$$\overline{\text{ВУЗАК}}\times 2025=*********?$$

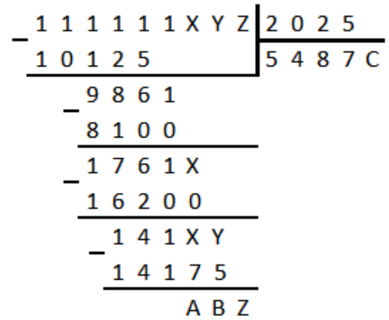
В данной записи буквам В, У, З, А, К *соответствуют разные цифры.*

Решение. Оценка. Заметим, что число 2025 делится на 9 и на 25, а значит и искомое произведение — тоже. Воспользуемся признаками делимости. С одной стороны, произведение должно оканчиваться на 00, 25, 50 или 75, а с другой стороны — иметь сумму цифр, делящуюся на 9. Единиц не больше семи (последние две цифры — отличны от 1). Если их ровно 7, то можно найти сумму цифр для всех четырёх концовок: $7+0=7, 7+7=14, 7+5=12, 7+12=19$. Ни одна из сумм не делится на 9. Следовательно, единиц не больше 6.

Пример. Шесть единиц возможно, например, в примере $54870\times 2025=111111750$.

Ответ. 6 единиц.

Замечание. Подобрать пример можно, например, выполнив деление столбиком, предположив, что число начинается с 6 единиц, таким образом:



Так как последний остаток ABZ — трёхзначен, то единственный способ поделить нацело — сделать $ABZ = 0$, тогда последняя цифра частного $C = 0$, а в делимом $XYZ = 750$.

Кроме того, 6 единиц получается ещё в 2 случаях:

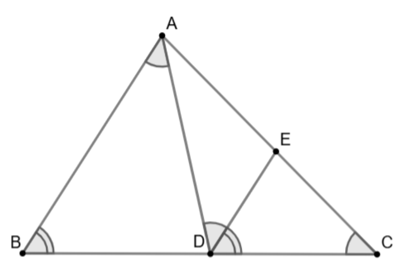
$$56845 \times 2025 = 115111125,$$

$$55166 \times 2025 = 111711150,$$

но в каждом из них в числе ВУЗАК повторяются цифры.

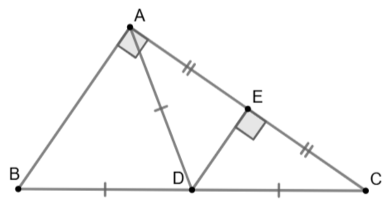
7.5. *Два треугольника называются подобными друг другу, если имеют одинаковый набор углов по их величине. Верно ли, что любой неравнобедренный треугольник можно разрезать на три треугольника, два из которых подобны исходному, а третий — нет?*

Решение. Пусть дан треугольник ABC, причём $\angle A > \angle B > \angle C$. Поставим на стороне BC точку D так, чтобы $\angle BAD = \angle C$ (такая точка есть, так как угол A больше угла C). На стороне AC отметим точку E так, что $DE \parallel AB$. Треугольник BAD подобен исходному: угол B — общий, угол BAD равен углу C, а оставшиеся углы равны, исходя из суммы углов треугольника (она всегда равна $180°$). Треугольник CDE тоже подобен исходному: угол C — общий, углы CDE и B равны, как соответственные при параллельных прямых, и из суммы углов треугольника угол DEC равен углу A. Заметим, что в треугольнике ADE выполнено $\angle DEA = 180° - \angle DEC = \angle B + \angle C$. Если исходный треугольник не прямоугольный, то эта сумма не равна ни одному из его углов, следовательно, треугольник ADE не будет ему подобен.



Если же исходный треугольник прямоугольный, то данное разрезание не подходит (легко проверить, что и другие углы треугольника ADE равны углам исходного). Придумаем другое разрезание. Поставим точку D на BC так, что $\angle DAC = \angle C$. И снова точка E на AC

такова, что $DE \parallel AB$. При этом соответственные углы DEC и A будут прямыми. Из построения два угла треугольника CAD равны, т.е. он равнобедренный, а DE в нём — высота и медиана. Тогда треугольники ADE и CDE равны, а кроме того — подобны исходному (в треугольниках CDE и ABC угол C — общий, угол DEC — прямой, и третьи углы равны из суммы углов треугольника). Кроме того, $\angle BAD = 90^\circ - \angle C = \angle B$, т.е. треугольник BAD содержит два равных угла, т.е. заведомо не подобен исходному.



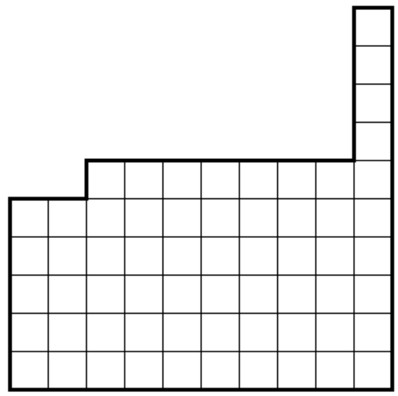
Ответ. Верно.

7.6. *Из 100 одинаковых картонных квадратиков выложена клетчатая фигура — квадрат* 10×10*, его периметр равен 40 клеткам. За ход можно убрать один квадратик так, чтобы периметр фигуры не изменился. При этом нельзя делать "дырки"(их периметр учитывается в периметре фигуры), и фигура не должна разваливаться на не связанные друг с другом части (клетки связываются друг с другом сторонами, связь по вершине не учитывается). Ходы делаются до тех пор, пока это возможно сделать по вышеизложенным правилам. Какое наибольшее количество ходов может быть сделано?*

Решение. Оценка. Первый способ. Будем считать, что клетки — вершины графа, а клетки, соседние по стороне квадрата, соединены ребром. Тогда в исходном графе ровно 100 вершин, а рёбер — по 9 в каждом из 10 вертикальных и 10 горизонтальных рядов клеток, т.е. 180. Условие задачи означает, что каждая убираемая клетка-вершина должна быть соединена с оставшейся частью графа ровно двумя рёбрами — две её стороны исчезнут, а две стороны, через которые шло ребро, добавятся к периметру. Следовательно, за один ход количество вершин графа уменьшается на 1, а рёбер — на 2. С другой стороны, граф должен оставаться связным, т.е. рёбер должно быть не меньше, чем количество вершин минус 1. Изначально же рёбер больше, чем вершин, на 80. Следовательно, нельзя убрать более 81 клетки.

Второй способ. Рассмотрим верхний ряд клеток. Невозможно убрать все 10 клеток из него. Действительно, рассмотрим клетку, которая была бы убрана последней: у нее уже нет соседей ни сверху, ни слева, ни справа, т.е. при её убирании исчезнет не менее 3 сторон, а добавится не более 1, т.е. периметр изменится. Аналогично и с другими сторонами. Следовательно, оставшиеся клетки всегда образуют связную фигуру, по клеткам которой можно добираться от любой из границ исходного квадрата до любой другой. Начнём с любой клетки, покрасив её в красный, и дойдём до каждой из границ квадрата. Каждый раз, когда мы впервые окажемся в каком-либо столбце или какой-либо строчке, покрасим клетку в красный. Одновременно оказаться в новом стобце и строчке нельзя — ходы параллельны сторонам квадрата. Следовательно, 9 новых строк и 9 новых столбцов дадут ровно 18 красных клеток. Плюс стартовая — 19. Таким образом, любая оставшаяся фигура содержит не менее 19 клеток, а убрано не более $100 - 19 = 81$.

Пример. Можно убрать 81 клетку в виде левого верхнего квадрата 9×9, убирая их по строкам сверху вниз, а в каждой строке — слева направо. Тогда оставшаяся фигура после любого хода будет иметь форму лесенки, а её периметр всегда равен периметру исходного квадрата. Пример такой лесенки на рисунке (после 38 ходов).



Ответ. 81 ход.

8 класс

8.1. *На линии кольцевого маршрута курсируют несколько автобусов. Они ходят равномерно, то есть на каждую из остановок приходят через одно и то же время. Но в субботу на линии на два автобуса меньше, чем в будни, поэтому это время больше ровно на 2 минуты. В воскресенье снимают ещё один автобус, и интервал увеличивается ещё на* 1 *минуту* 20 *секунд. Сколько автобусов на линии в рабочий день? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть в будни на линии курсируют n автобусов, и пусть они ходят с интервалом x минут. Тогда каждый автобус полностью проходит круг за время nx. Аналогичный подсчёт показывает, что в субботу время автобуса на прохождение круга составляет $(n-2)(x+2)$, а в воскресенье $(n-3)\left(x+3\frac{1}{3}\right)$ минут. Так как ни длина маршрута, ни скорости автобусов не меняются, это время одно и то же для всех дней, следовательно, мы имеем систему

$$\begin{cases} nx &= (n-2)(x+2), \\ nx &= (n-3)\left(x+3\frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

После раскрытия скобок и упрощений эта система принимает вид

$$\begin{cases} n-x &= 2, \\ 10n-9x &= 30. \end{cases}$$

Её решение единственно: $n=12$, $x=10$. Это значит, что на линии в будни курсируют 12 автобусов, а интервал движения составляет 10 минут.

Ответ. 12 автобусов.

8.2. *Петя считает число круглым, если оно делится на* 100, *не очень большим, если оно четырёхзначное, и трижды квадратным, если оно 1) квадрат числа; 2) сумма его цифр — квадрат числа; 3) сумма его цифр без последней — квадрат числа. Найдите все некруглые, не очень большие, трижды квадратные числа и докажите, что других нет.*

Первое решение. Пусть $\overline{abcd}=k^2$ не круглое, не очень большое, трижды квадратное четырёхзначное число (a, b, c, d — его цифры). Тогда $a+b+c=n^2$, $a+b+c+d=m^2$ для некоторых натуральных чисел m и n, причём $m^2-n^2=d\leqslant 9$, откуда $m\leqslant 5$. При этом $d\neq 0$ (иначе $c=0$ и число $\overline{abcd}$ становится круглым). Значит, $m>n$. Кроме того, d — последняя цифра квадрата натурального числа, поэтому может принимать только значения 1, 4, 5, 6 и 9. Остаются всего две возможности. 1) $m=3$, $n=2$, $d=5$; 2) $m=5$, $n=4$; $d=9$. Рассмотрим обе.

1) $m=3$, $n=2$, $d=5$. Тогда число k оканчивается цифрой 5, а его квадрат — двузначным числом 25. Тогда $c=2$, а $a+b+c=4$, поэтому $a+b=2$. Из чисел 2025 и 1125 только первое является точным квадратом (числа 45).

2) $m=5$, $n=4$; $d=9$. Тогда $a+b+c=16$. $\overline{abc9}=k^2$ для некоторого натурального k. Значит, k — двузначное натуральное число с последней цифрой 3 или 7. То есть или $k=10s+3$, или $k=10s+7$ (s — цифра десятков). Так как k^2 — число четырёхзначное,

$s \geqslant 3$ Далее, всякое число при делении на 9 даёт тот же остаток, что и сумма его цифр. Таким образом число k^2 при делении на 9 даст тот же остаток, что и число 25, то есть 7. Перебором всех k от 0 до 9, находим, что число k при делении на 9 должно давать остаток 4 или 5. Значит, этот остаток даст и число $k - 9s$. Последнее число либо $s + 3$, либо $s + 7$. Так как $3 \leqslant s \leqslant 9$, $6 \leqslant s + 3 \leqslant 12$, и ни одно такое число при делении на 9 нужного остатка не даст. Аналогично, $10 \leqslant s + 7 \leqslant 16$. Нужные остатки дают числа $s = 6$ и $s = 7$. Получаем два числа $67^2 = 4489$ и $77^2 = 5929$. Проверкой убеждаемся, что оба числа годятся.

Второе решение. Пусть искомое число равно $N = n^2$, его сумма цифр равна $S = s^2$, а последняя цифра — q. Обозначим также $P = S - q$, $p = \sqrt{P}$. Отметим, что из того, что N четырёхзначное, следует, что $n \geqslant 32$. В частности, $P = p^2 > 1$ поскольку в промежутке от 1000 до 1009 квадратов нет.

Далее, $q = S - P = s^2 - p^2 = (s - p)(s + p) > 0$, так как число N не круглое. Таким образом, q — число от 1 до 9 — представимо в виде произведения двух чисел одной чётности. Если $s - p > 1$, то $s - p$ не меньше двух, $s + p < 9/2$, значит $s + p$ не больше четырёх, то есть $p = 1$, что, как отмечено выше, невозможно. Итак, $s - p = 1$ и $q = 1 \cdot (s + p) = 2p + 1$. Поскольку $p > 1$, $q \leqslant 9$, то $p = 2$, 3 или 4.

$p = 2$, $P = 4$, $q = 5$. Поскольку $P = 4$, то $N < 4096$, откуда $32 < N \leqslant 63$. При этом. так как $S = 9$, значит $N = n^2$ делится на 9 и 5, то есть n делится на 15, но N некруглое, откуда n не делится на 2. В силу $32 \leqslant n \leqslant 63$ остается лишь $n = 45$ и проверка показывает, что $N = 2025$ удовлетворяет всем условиям задачи.

$p = 3$, $P = 9$, $q = 7$. Последняя цифра 7 в десятичной записи никакого квадрата числа невозможна, значит и решений в этом случае нет.

$p = 4$, $P = 16$, $q = 9$. Поскольку n двузначно, то для некоторого $3 \leqslant k \leqslant 10$ имеем $N^2 = (10k \pm 3)^2$. Число N^2, как и $S = 16 + 9 = 25$, имеет остаток 7 при делении на 9, откуда тот же остаток имеет $(k \pm 3)^2$, значит $k \pm 3$ имеет остаток 4 или 5 при делении на 9. Теперь, воспользовавшись $3 \leqslant k \leqslant 10$ при выборе $k + 3$, получаем, что $k = 10$ и $N = 103 > 99$, что невозможно. При выборе $k - 3$ остаток 4 или 5 будет лишь с $k - 3 = 4$, то есть $k = 7$, и с $k - 3 = 5$, то есть $k = 8$, откуда или $n = 10k - 3 = 67$ и $N = n^2 = 4489$, или $n = 10k - 3 = 77$ и $N = n^2 = 5929$. Проверка показывает, что все условия задачи выполнены ив том и в другом варианте.

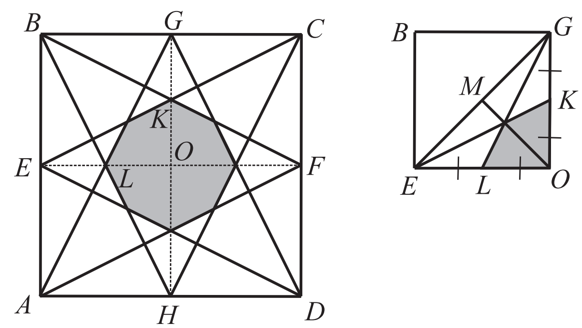
Ответ. $2025, 4489, 5929$.

8.3. *Квадрат площади 1 разрезали по восьми отрезкам, соединяющим вершины квадрата с серединами несмежных им сторон. Квадрат распался на многоугольники. Найдите площадь многоугольника, содержащего центр квадрата. Ответ обоснуйте.*

Решение. Обозначим разрезаемый квадрат как $ABCD$ и проведём в нём обе средние линии $EF \parallel BC$ и $GH \parallel AB$ — см. рисунок. Нетрудно убедиться, что проведённые разрезы пересекутся именно на средних линиях. Многоугольник, содержащий центр квадрата — точку O, — является восьмиугольником, симметричным относительно обеих его средних линий. Пусть K — вершина этого восьмиугольника, лежащая на отрезке GO. Так как отрезок GK — средняя линия треугольника BCF, $GK = \dfrac{1}{2}CF = \dfrac{1}{2}GO$, то есть $GK = KO$. Аналогично

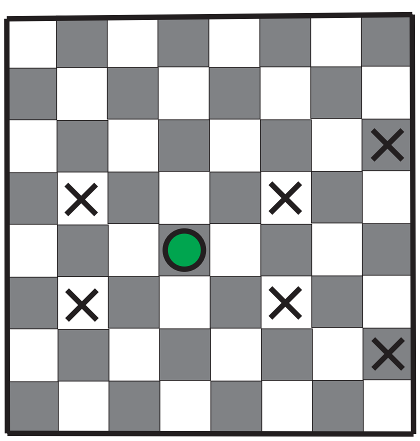
$EL = LO$, где L — вершина восьмиугольника, лежащая на отрезке EO. В силу симметрии нам достаточно найти площадь той четверти восьмиугольника, которая располагается ближе к вершине B, то есть в квадрате $EBGO$. Рассмотрим этот квадрат отдельно. В треугольнике EGO отрезки EK и GL — медианы. Проведём третью его медиану — отрезок MB. Три медианы любого треугольника делят его на 6 треугольников равной площади, восьмиугольник покрывает ровно две из них, то есть покрывает треть площади треугольника, или 1/6 площади квадрата $EBGO$. Таким образом, площадь одной четверти восьмиугольника равна $\frac{1}{6}S_{EBGO} = \frac{1}{24}S_{ABCD} = \frac{1}{24}$, а площадь всего восьмиугольника в 4 раза больше.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

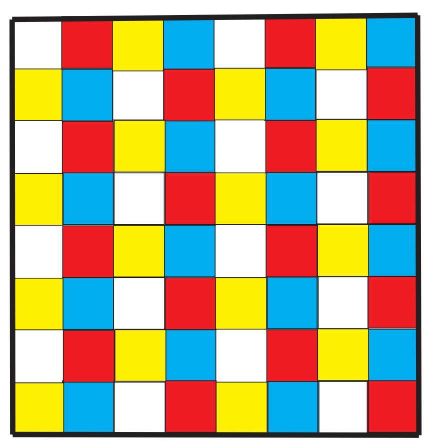


8.4. *Вымышленная шахматная фигура кенгуру ходит в четырёх направлениях (вправо на 2 вверх на 1, влево на 2 вверх на 1, вправо на 2 вниз на 1 и влево на 2 вниз на 1), но за один ход может делать несколько прыжков в выбранном направлении (см. рисунок).*

Назовем расстановку на пустой доске нескольких кенгуру (возможно, ни одного) мирной, если ни одно кенгуру не стоит под боем другого. Докажите, что количество всевозможных мирных расстановок является четвёртой степенью натурального числа.



к условию 8.4



к решению 8.4.

Решение. Раскрасим доску в 4 цвета, как на рисунке, и заметим, что кенгуру при своём ходе не меняет цвет поля, на котором стоит (в этом смысле кенгуру подобен шахматному слону). Таким образом, все кенгуру делятся на 4 типа по цвету своего поля: белопольные, краснопольные, синепольные и жёлтопольные. В силу симметрии число мирных расстановок одноцветных кенгуру одно и то же, пусть оно равно n. Так как любой расстановке кенгуру одного цвета кенгуру других цветов можно расставить всеми возможными способами, общее число мирных расстановок будет равно n^4, что и требовалось доказать.

8.5. а) *На прямой отложены* 2025 *отрезков так, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что есть точка, принадлежащая всем отрезкам;* (3 балла)

б) *На окружности отмечены* 2025 *дуг, каждая из которых меньше трети окружности и таких, что любые две дуги имеют общую точку. Докажите, что найдётся точка, общая для всех дуг;* (3 балла)

в) *На координатной плоскости размещены* 2025 *кругов так, что любые два из них имеют общую точку с какой-то параллельной оси OX прямой. Докажите, что есть параллельная OX прямая, имеющая общую точку с каждым из* 2025 *кругов;* (2 балла)

г) 2025 *кругов расположены так, что из любой точки все они, кроме, быть может, одного видны под углом, меньшим* 60°. *Известно, что для любых четырёх кругов найдется прямая, имеющая общую точку с каждым из этих четырёх кругов. Докажите, что найдётся прямая, имеющая общую точку с каждым из этих* 2025 *кругов.* (6 баллов)

Решение. Пусть $N = 2025$.

а) Рассмотрим 2025 отрезков $[a_i, b_i]$. Среди всех их левых концов, а их конечное число, рассмотрим самый правый, пусть это a_Π, среди всех их правых концов рассмотрим самый левый, пусть это b_Λ.

Покажем, что $a_\Pi \leqslant b_\Lambda$. Действительно, если индексы Π и Λ совпадают, то $a_\Pi \leqslant b_\Lambda$, так как эти концы образуют один из N отрезков. Если же индексы Π и Λ различны, то по построению $a_\Lambda \leqslant a_\Pi$, $b_\Lambda \leqslant b_\Pi$, а отрезки $[a_\Pi, b_\Pi]$, $[a_\Lambda, b_\Lambda]$ имеют общую точку c, откуда $a_\Pi \leqslant c \leqslant b_\Lambda$. Итак, и в том, и в другом случае, показано $a_\Pi \leqslant b_\Lambda$.

Теперь, в силу $a_\Pi \leqslant b_\Lambda$, по построению этих точек, для любых номеров i, выполнено и $a_i \leqslant a_\Pi \leqslant b_\Lambda \leqslant b_i$, в частности, это означает, что точка a_Π принадлежит всем отрезкам.

б) Сначала покажем, что есть точка на окружности, не попавшая ни в одну из дуг. Рассмотрим всевозможные N дуг, пусть самая длинная из них имеет центральный угол $2K$ градусов. По условию, $2K < 120$. Соответствующую ему дугу (или одну из них, если их несколько) назовем длинной, отметим центральную точку длинной дуги как O. Покажем, что диаметрально противоположная ей точка, пусть A, не принадлежит никакой дуге. Любая дуга, если содержит и точку A, и некоторую общую точку из длинной дуги, то содержит и всю дугу между ними, дугу, центральный угол которой не меньше $180 - K > 120$ градусов. Поскольку самая длинная из N дуг имеет центральный угол меньше, то любая дуга пересекающаяся с длинной, не может содержать точку A. Значит и все N дуг таковы и не содержат точку A.

Любую точку любой из этих дуг можно получить из O поворотом на угол от -180 до 180 градусов по часовой стрелке, назовем такое число углом точки. У любой дуги дуги сопоставим угол каждой ее точке, тем самым для каждой дуги мы получим подмножество отрезка $[-180, 180]$. Поскольку ни одна из этих дуг не содержит точку A, диаметрально противоположную точке O, то градусная мера всех этих углов по модулю меньше 180, значит и это подмножество также будет отрезком. Теперь не только каждой градусной мере в интервале от -180 до 180 соответствует ровно одна точка, точка, которую можно получить из O поворотом на такое число градусов по часовой стрелке, но и каждой из N дуг соответствует единственное подмножество-отрезок, и он лежит в интервале от -180 до 180.

По условию любые две дуги пересекаются, то есть имеют общую точку. Этой точке (как точке, отличной от A) соответствует единственный угол, значит подмножества-отрезки этих дуг также пересекаются. Применяя предыдущий пункт, получаем, что все подмножества-отрезки всех дуг имеют общее число-угол (из интервала от -180 до 180), а значит соответствующая этому центральному углу точка окружности принадлежит всем дугам, что и требовалось доказать.

в) Для каждого круга рассмотрим всевозможные параллельные оси OX прямые, имеющие общую точку с этим кругом. Каждая такая прямая пересекает OY ровно в одной точке, а все такие прямые в пересечении с OY образуют отрезок. Назовем этот отрезок образом круга.

По условию, для любой пары кругов найдется параллельная оси OX прямая, имеющая по общей точке с каждым из этих двух кругов. Тогда и образы любой пары кругов имеют общую точку. Поскольку эти образы — отрезки, и каждая пара отрезков имеет общую точку, то, в силу первого пункта, найдется точка, общая для всех отрезков-образов. Значит проходящая через эту точку параллельно оси OX прямая имеет общую точку с каждым из кругов.

г) Выберем какой-нибудь круг, соответствующую ему окружность назовем особой. Отметим на особой окружности точку P. Теперь для любой прямой проведем через P параллельную ей прямую, а заодно отметим и вторую точку (помимо P) пересечения этой прямой с окружностью (если проведенная прямая оказалась касательной, значит ее образ — сама P). Назовем эту вторую точку «особой» для рассмотренной прямой.

Рассмотрим какую-нибудь пару кругов, а с ней и всевозможные прямые, имеющие общие точки с этими кругами. Этим прямым соответствует некоторая дуга на особой окружности. По условию, между любыми двумя прямыми, пересекающими пару кругов, угол меньше 60 градусов. Тогда центральный угол каждой такой особой дуги меньше 120 градусов (чтобы это заметить, достаточно взять в качестве прямых касательные, провести биссектрису образованного ими угла и посчитать углы в прямоугольном треугольнике с катетами: отрезок одной касательной и радиус, опущенный на нее в качестве перпендикуляра).

Рассмотрим любые две особые дуги. Они образованы двумя парами кругов, значит, по условию, есть прямая, проходящая через все эти четыре круга. Тогда точка, особая для этой прямой, содержится и в той, и в другой особой дуге. Итак, показано, что любая пара таких особых дуг имеет общую точку. Поскольку все они с центральным углом меньше 120 градусов, то по второму пункту все такие дуги имеют общую точку (назовем её Q). Это означает, что для каждой пары кругов есть прямая, имеющая по общей точке с каждым из этих двух кругов. Более того, по построению особой точки Q найдется такая прямая, параллельная PQ (или параллельна касательной к P при $P = Q$).

Проведем оси так, чтобы осью OX стала прямая PQ (или касательная к P при $P = Q$). Тогда нами показано, что через любую пару кругов проходит имеющая по общей точке с каждым из этих двух кругов прямая, параллельная оси OX. По третьему пункту это означает, что найдется прямая, имеющая по общей точке с каждым из 2025 кругов, что и требовалось доказать.