РЕШЕНИЯ

9 класс

9.1. *В ряд записали числа: сначала все нечётные от* 1 *до* 2025 *(по возрастанию), а затем все чётные от* 2024 *до* 2 *(по убыванию). Сколько чисел делятся на номер своей позиции в этом ряду?*

Решение. При $1 \leqslant k \leqslant 1013$ член последовательности под номером k равен $2k-1$, а при $1014 \leqslant k \leqslant 2025$ — равен $2026-2\cdot(k-1013)=4052-2k$. Число $2k-1$ делится на k только при $k=1$. Если $4052-2k$ делится на k, то k — делитель числа $4052=2^2\cdot 1013$, больший 1013. Поскольку число 1013 простое, наименьший возможный делитель равен 2026, что невозможно.

Ответ. Одно.

9.2. *Заяц и черепаха устроили забег по круговой тропинке. Они стартуют одновременно из одной точки в одном направлении, каждый — со своей постоянной скоростью. Заяц быстрее черепахи. Каждый раз, когда заяц и черепаха встречались в одной точке, черепаха мгновенно разворачивалась и с той же постоянной скоростью двигалась в противоположном направлении. Когда черепаха впервые вернулась на точку старта, заяц встретил её в* 209*-ый раз. Во сколько раз скорость зайца больше скорости черепахи?*

Решение. Примем длину тропинки за 1 км. Пусть скорость зайца в k раз больше. Тогда если скорость черепахи равна v км/ч, скорость зайца равна kv км/ч. Из условия следует, что 105 обгонов произошло, когда черепаха ползла по направлению движения зайца, а 104 обгона — когда она ползла в противоположном направлении. Через каждые два обгона черепаха проползает в направлении бега зайца расстояние

$$v\cdot\left(\frac{1}{kv-v}-\frac{1}{kv+v}\right)=\frac{2}{k^2-1}$$

км. Значит весь круг она проползёт, когда проползёт расстояние

$$104\cdot\frac{2}{k^2-1}+v\cdot\frac{1}{kv-v}=\frac{208}{k^2-1}+\frac{1}{k-1}=\frac{209+k}{k^2-1}.$$

Решив уравнение $1=\frac{209+k}{k^2-1}$, получим единственный положительный корень $k=15$.

Ответ. В 15 раз.

9.3. *Даны положительные числа a и b. Известно, что существует треугольник со сторонами $1, a, 2a^2$ и существует треугольник со сторонами $1, b, 2b^2$. Докажите, что существует треугольник со сторонами a, b, ab.*

Решение. Из неравенства треугольника следует, в частности, что $1+a>2a^2$ и $2a^2+a>1$. Первое неравенство перепишем в виде $(a-1)(2a+1)<0$, а второе — в виде $(a+1)(2a-1)>0$. Оба неравенства верны лишь в случае $\frac{1}{2}<a<1$. Аналогично, $\frac{1}{2}<b<1$. Неравенство $a+b>$

ab верно, поскольку $ab < a < a+b$. Докажем, что $a+ab > b$. $a+ab = a(b+1) > \frac{b+1}{2} > \frac{b+b}{2} = b$. Неравенство $b + ab > a$ доказывается аналогично.

9.4. *а) Дима решил покрасить некоторые клетки бесконечной во все стороны клетчатой доски в три цвета — красный, синий, зелёный. Он хочет, чтобы в каждой горизонтальной полоске 1×3 была хотя бы одна красная клетка, в каждой вертикальной полоске 1×3 была хотя бы одна синяя клетка, а в каждом квадрате 2×2 была хотя бы одна зелёная клетка. Докажите, что на раскрашенной по таким правилам бесконечной клетчатой доске не будет незакрашенных клеток.* *(3 балла)*

б) Теперь Дима взял квадрат 30×30 и решил покрасить какие-то его клетки в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в этом квадрате выполнялись условия, описанные выше. Может ли он осуществить эту задачу, не покрасив ровно 75 клеток? *(4 балла)*

Решение. Любой квадрат 3×3 можно разбить на три горизонтальные или на три вертикальные полоски. Поэтому в каждом таком квадрате хотя бы три красных и хотя бы три синих клетки.

а) Предположим, что есть незакрашенная клетка. Возьмём квадрат 3×3 с центром в этой клетке. По доказанному ранее, в таком квадрате не может быть более двух зелёных клеток. Этот квадрат содержит четыре квадрата 2×2, а любая зелёная клетка содержится одновременно не более, чем в двух указанных квадратах 2×2. Значит обе клетки содержатся ровно в двух квадратах 2×2, значит они стоят не в углах. Если они расположены в соседних сторонах квадрата 3×3, то они содержатся только в трёх квадратах 2×2. Значит они стоят в противоположных сторонах. Но тогда в этом квадрате либо средний столбец не содержит синих клеток, либо средняя строка не содержит красных клеток — противоречие. Значит все клетки покрашены.

б) Квадрат 30×30 разбивается на 300 горизонтальных полосок, на 300 вертикальных полосок или на 225 квадратов 2×2. Это означает, что незакрашенных клеток не более 75, при этом их может быть ровно 75 только в случае, когда в каждой горизонтальной полоске ровно одна красная клетка, в каждой вертикальной — ровно одна синяя клетка, а в каждом квадрате 2×2 ровно одна зелёная клетка. Из пункта а) мы понимаем, что незакрашенные клетки могут быть только на границе квадрата. Неугловых незакрашенных клеток хотя бы 71, тогда по принципу Дирихле на какой-то стороне квадрата 30×30 есть хотя бы 18 незакрашенных среди 28 неугловых клеток. Так как $18 \cdot 2 > 28$, то найдутся две соседние незакрашенные клетки. Рассмотрим эти две клетки и пусть они находятся в верхней строке. Рассмотрим квадрат 2×2, содержащий выбранные незакрашенные клетки. В этом квадрате есть зелёная клетка. Без ограничения общности, пусть она под правой незакрашенной клеткой. Рассмотрим квадрат 3×3, в котором незакрашенная клетка и зелёная клетка под ней находятся в самом правом столбце. Внутри этого квадрата левый верхний квадрат 2×2 содержит зелёную клетку. Мы нашли квадрат 3×3, в котором хотя бы две незакрашенные и хотя бы две зелёные клетки, значит в нём нет трёх красных или трёх синих клеток — противоречие.

9.5. *В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC ($AB > AC$) проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, точка M — середина стороны BC, точки B_2 и C_2 — середины высот*

BB_1 и CC_1 соответственно, не совпадающие с точкой пересечения высот ABC. Точка P — основание перпендикуляра, проведённого из вершины A к прямой B_1C_1.

а) Докажите, что $\angle A_1AC = \angle PAC_1$; *(2 балла)*

б) Докажите, что точки M, A_1, B_2, C_2 лежат на одной окружности; *(2 балла)*

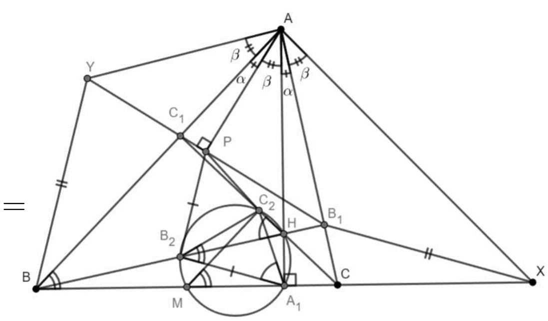
в) Пусть точка X симметрична точке B относительно точки A_1, а точка Y — симметрична точка B_1 относительно точки P. Докажите, что треугольники AB_1X и ABY равны; *(3 балла)*

г) Докажите, что точки A_1 и P симметричны относительно прямой B_2C_2; *(4 балла)*

д) Докажите, что треугольник PB_2C_2 подобен треугольнику ABC. *(3 балла)*

Решение. а) Четырёхугольник BCB_1C_1 вписанный, так как на BC опираются прямые углы BB_1C и CC_1B. Значит $\angle AC_1P = \angle ACB$, из чего следует подобие треугольников PAC_1 и A_1AC и требуемое равенство углов.

б) Пусть H — ортоцентр ABC. Отрезки MB_2 и MC_2 являются средними линиями соответственно треугольников BB_1C и CC_1B, а значит $\angle MB_2B_1 = \angle MC_2C_1 = 90°$. Точки A_1, B_2, C_2 лежат на окружности с диаметром MH.



в) Из пункта а) $\angle BAP = 90° - \angle AC_1P = 90° - \angle ACB = \angle CAA_1$. Пусть $\angle BAP = \angle CAA_1 = \alpha$ и $\angle PAA_1 = \beta$. Из симметрии следует равнобедренность треугольников ABX и AB_1Y, в которых высоты AA_1 и AP являются биссектрисами, а значит $\angle XAC = \angle BAA_1 - \angle A_1AC = \beta$ и $\angle YAC_1 = \angle PAB_1 - \angle PAC_1 = \beta$. Треугольники AB_1X и ABY равны по двум сторонам и углу между ними.

г) По построению, B_2P и B_2C — средние линии в треугольниках BB_1Y и BB_1X, значит $B_2P = \frac{1}{2}BY, B_2A_1 = \frac{1}{2}B_1X$. Из доказанного в пункте в) равенства треугольников следует, что $B_1X = BY$, а значит $B_2P = B_2A_1$. Аналогично доказывается, что $C_2P = C_2A_1$. Для этого нужно симметрию точки C относительно A_1 и симметрию точки C_1 относительно P и повторить рассуждения из пункта в). Из этого следует равенство треугольников PB_2C_2 и $A_1B_2C_2$, а также симметрия A_1 и P относительно B_2 и C_2.

д) В силу пункта г) достаточно доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_2C_2$. Из $AB > AC$ следует, что M лежит между A_1 и B, а B_2 — между H и B. Из доказанной в пункте б) вписанности следует, что $\angle A_1B_2C_2 = \angle A_1MC_2 = \angle A_1BC_1 = \angle ABC$. Из той же вписанности, вне зависимости от положения точки C_2 следует $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_2HC_1 = 90° - \angle HBA = \angle BAC$. Подобие по двум углам доказано.

10-11 класс

10-11.1. *Решите систему в действительных числах:*

$$\sqrt[4]{3}(a+b+c)=\sqrt{45},\ a^2+b^2+c^2=45\sqrt{3},\ \sqrt[4]{3}(a^3+b^3+c^3)=45\sqrt{15},\ a^4+b^4+c^4=2025.$$

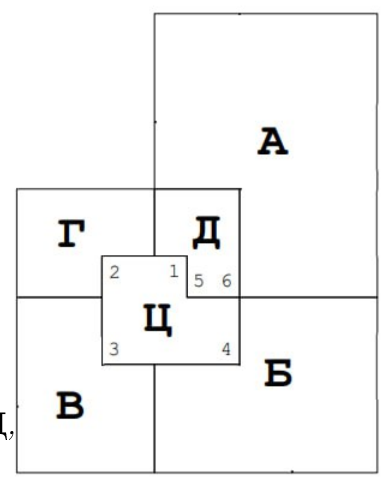
Решение. Отметим, что, взяв $A=\sqrt{45}/\sqrt[4]{3}$, систему можно переписать как $a+b+c=A$, $a^2+b^2+c^2=3A^2$, $a^3+b^3+c^3=A^3$, $a^4+b^4+c^4=3A^4$. Значит в качестве решения подойдут любые a,b,c, равные по модулю A, если ровно два из них положительны. Итак, найдены указанные в ответе решения. Докажем, что других нет.

Способ 1. Из второго и четвертого уравнения системы среднее арифметическое чисел a^2,b^2,c^2, равное A^2, совпадает со среднеквадратическим тех же чисел. Значит все a^2,b^2,c^2 равны. Если бы a,b,c совпадали, то из первого уравнения $a=A/3$, откуда в силу третьего $A=A^3/9$. Так как $0\neq A^2\neq 9$, числа a,b,c не совпадают. В силу положительности A, положительных среди a,b,c больше, то есть ровно два. Это даёт в точности ответ выше.

Способ 2. То же можно показать, не используя четвёртого уравнения. Сначала заметим, что все a,b,c не могут равняться A одновременно. Пусть, например, c не равно A. Тогда из первого и третьего уравнений $a+b=A-c\neq 0$ и $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(A-c)(A^2+Ac+c^2)$, откуда $a^2-ab+b^2=A^2+Ac+c^2$. Умножая полученное на два и группируя, получаем $3(a^2+b^2)-(a+b)^2=A^2+c^2+(A+c)^2$, что дает $3(a^2+b^2)-(A-c)^2=A^2+c^2+(A+c)^2$. Раскрывая скобки, имеем $3(a^2+b^2)-A^2-c^2=2A^2+2c^2$, то есть $a^2+b^2=A^2+c^2$.

Теперь, воспользовавшись вторым уравнением, имеем $3A^2-c^2=a^2+b^2=A^2+c^2$ и $A^2=c^2$, что в силу $A\neq c$ означает $c=-A$. Подставляя это в первые два уравнения, получаем $a+b=2A$ и $a^2+b^2=2A^2$, откуда $(a+b)^2=4A^2$, $2ab=2A^2$, $(a-b)^2=0$ и $a=b=A$.

Ответ. $(a,b,c)=(-\sqrt{45}/\sqrt[4]{3},\sqrt{45}/\sqrt[4]{3},\sqrt{45}/\sqrt[4]{3})$,
$(a,b,c)=(\sqrt{45}/\sqrt[4]{3},-\sqrt{45}/\sqrt[4]{3},\sqrt{45}/\sqrt[4]{3})$,
$(a,b,c)=(\sqrt{45}/\sqrt[4]{3},\sqrt{45}/\sqrt[4]{3},-\sqrt{45}/\sqrt[4]{3})$.



10-11.2. *На рисунке справа изображены* 11 *подобных шестиугольников. Шесть из них —* **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Ц** *— не пересекаются, а остальные пять —* **Д**∪**Ц**, **Г**∪**Д**∪**Ц**, **В**∪**Г**∪**Д**∪**Ц**, **Б**∪**В**∪**Г**∪**Д**∪**Ц**, **А**∪**Б**∪**В**∪**Г**∪**Д**∪**Ц** *— являются объединениями этих шести. Рисунок был специально искажён, отрезки в нем были чуть повёрнуты и растянуты, но это не мешает считать, что в каждом из этих шестиугольников один угол больше развернутого, а остальные — меньше. Докажите, что а) в шестиугольнике* **Ц** *все углы, кроме одного, прямые; б) левые стороны шестиугольников* **А** *и* **Б** *лежат на одной прямой.*

Решение. Заметим, в каждом из этих шестиугольников все углы, кроме одного — меньше развёрнутого. Значит угол больше развёрнутого одинаков у всех них. Рассматривая такие углы в шестиугольниках **Б**, **В**, **Г**, **Д**, видим, что четыре угла у **Ц**, а именно $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, равны. Сравнивая угол $\angle 6$ с соответствующим ему углом в **Ц** (то есть то ли с $\angle 2$, то ли с

$\angle 4$), видим, что $\angle 2 = \angle 4$ равен $\angle 6$. Теперь, раз уж правые стороны у **Ц** и у **Д** являются общей стороной шестиугольника **Д**$\cup$**Ц**, то равные углы $\angle 4$ и $\angle 6$ являются соответственными. Значит три стороны у **Ц** параллельны, что, в силу $\angle 2 = \angle 3$, означает равенство всех этих шести углов 90^0. Итак, пункт а) доказан. Показано также, что через одну стороны шестиугольников параллельны.

Для доказательства пункта б) отметим, что объединение **А**$\cup$**Б** (как результат вычитания **В**$\cup$**Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц** из **А**$\cup$**Б**$\cup$**В**$\cup$**Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц**) подобно объединению **В**$\cup$**Г** (результата вычитания **Д**$\cup$**Ц** из **В**$\cup$**Г**$\cup$**Д**$\cup$**Ц**). Более того, по той же причине, и размеры в **А** и **Б** больше размеров в **В** и **Г**, Значит в какое-то количество раз больше был бы и зазор у прямых, содержащих левые стороны **А** и **Б** по сравнению с зазором между прямыми, содержащими правые стороны **В** и **Г**. Поскольку эти зазоры совпали, ведь **А** и **Г** имеют общую точку, то зазор равен нулю, то есть найдется прямая, которая содержит стороны всех этих шестиугольников (**А**, **Б**, **В**, **Г** (а на самом деле еще и **Д**).

Примечание. Легко заметить, что такой шестиугольник можно разрезать на самоподобные части. Он является единственным с таким свойством многоугольником с числом сторон больше четырёх. Про этот шестиугольник, шестиугольник Амманна, и построение апериодических паркетов на его основе, можно почитать, например, в статье Александра Шеня с соавторами.

10-11.3. *Даны какие-то действительные числа a, b, c, d. Известно, что сумма $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x$ неотрицательна при любом действительном x. Найдите a, b, c, d.*

Первое решение. Пусть $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x$. Теперь из $f(x) + f(\pi - x) \geqslant 0$ следует $g(x) = d\cos 4x + b\cos 2x \geqslant 0$. Сложим $g(x) \geqslant 0$ с неравенством $g(\frac{\pi}{2} - x) \geqslant 0$. Получим $d\cos 4x \geqslant 0$. Но косинус принимает любые знаки. Значит $d = 0$. Подставляя в g, получаем $g(x) = b\cos 2x \geqslant 0$, откуда $b = 0$. Тогда $f(x) = a\cos x + c\cos 3x$. В точках $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ получаем два неотрицательных числа $f(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}) = \pm(c - a)\sqrt{2}/2$, то есть $a = c$ и неотрицательна функция $f(x) = a(\cos x + \cos 3x)$. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$, получаем неотрицательность $\pm a$, то есть a также зануляется. Итак, все коэффициенты равны нулю.

Второе решение. Заметим, что $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x$ является производной функции $a\sin x + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{3}\sin 3x + \frac{d}{4}\sin 4x$. Эта функция не убывает, так как её производная неотрицательна. Поскольку эта функция равна нулю в точках 0 и 2π, значит во всех точках равна нулю и она, и ее производная. Итак, при любых x

$$12a\sin x + 6b\sin 2x + 4c\sin 3x + 3d\sin 4x = 0, \qquad a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x = 0.$$

Подставляя $\pi/2$ в первое и 0 во второе, получаем $a - 4c = 0$, $a + b + c + d = 0$. Подставляя $\pi/2$ в первое и 0 во второе, получаем $12a - 4c = 0$, $a + b + c + d = 0$. Подставляя туда же $\pi/4$ и π, имеем $(12a + 4c)\sqrt{2}/2 = 0$ и $a - c + b - d = 0$. Из $12a - 4c = 0$ и $(12a + 4c)\sqrt{2}/2 = 0$ следует, что $a = c = 0$. Теперь $b + d = a + b + c + d = 0$ вместе с $b - d = a - c + b - d = 0$ дают $b = d = 0$.

Ответ. $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$.

Примечание. Эта задача о линейной независимости тригонометрических мономов, более удобных для практики, чем x^n. На этой независимости основана масса вычислительных методов, от ряда Фурье до самых современных и востребованных. Оставим общий случай этой задачи (линейная независимость всех тригонометрических мономов: $\sin x, \cos x$,

$\sin 2x, \cos 2x, ...$) как упражнение пытливому читателю. Тем более, что основную идею этого решения, равно как и основную нужную аналогию, мы уже написали выше...

10-11.4. *Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная в пространстве. Известно, что нет плоскости, которая содержала бы её всю. Верно ли, что всегда найдется не содержащая ни одного её звена плоскость, которая разрежет эту ломаную а) не меньше, чем на четыре части; б) ровно на четыре части?*

Решение. Будем отрезки ломаной называть *звеньями*, а концы звеньев — *вершинами*. Натянем на ломаную выпуклую оболочку (минимальный по объёму выпуклый многогранник, содержащий все её вершины, максимальный по объёму многогранник с вершинами среди вершин ломаной). Это выпуклый многогранник. Обозначим какую-то его вершину через A. Она является и вершиной ломаной, из неё выходит два звена, но из нее выходит хотя бы три ребра многогранника. Тогда найдётся ребро, которое звеном не является. Обозначим его через AA_0. Как через A, так и через A_0, проходит ровно по два звена, обозначим их через BA, AC, B_0A_0, A_0C_0 (при этом не исключены совпадения $B = B_0$ и $C = C_0$). Пусть r — самое маленькое расстояние от A, A_0 до других вершин ломаной. Отложим на AB, AC отрезки AD, AE длиной $r/4$ каждый. Теперь точка A_0 на плоскости A_0DE, A — по одну её сторону, а все остальные вершины ломаной — по другую. Пусть s — самое маленькое расстояние от плоскости A_0DE до отличных от A_0 вершин ломаной. Отложим на A_0C_0 отрезок A_0F длиной $s/4$. Теперь точки A, A_0 по одну сторону от плоскости FCD, а все остальные вершины ломаной — по другую. Ну тогда эта плоскость может пересечь только звенья, идущие от A и A_0 к остальным вершинам, таких звеньев ровно четыре (BA, AC, B_0A_0, A_0C_0). Плоскость пересекла замкнутую ломаную ровно в четырёх точках, значит разделила её ровно на четыре куска. Два из них (вместе с A и A_0) по одну её сторону, два — по другую. Что и требовалось.

Примечание. Задачу можно решать и принципиально по-другому. В одной из серьёзных монографий встречалось решение, к примеру, и через чебышёвские радиусы. Впрочем, тригонометрических полиномов в той книге было гораздо больше.

10-11.5. *Даны натуральные числа a, b и простое число d такие, что $a^2 + b^2$ делится на d и числа a и b взаимно просты. Докажите, что для каких-то натуральных $k, i < d$*

а) из того, что Na^2 и Nb^2 делятся на d для какого-то натурального N, следует, что и N делится на d; *(2 балла)*

б) число $k^2a^2 - i^2b^2$ тоже делится на d; *(5 баллов)*

в) число $k^2 + i^2$ делится на d; *(3 балла)*

г) выполнено $k^2 + i^2 = d$. *(4 балла)*

Решение. Докажем все пункты для случая, когда d не является полным квадратом.

а) Отметим, что поскольку a, b взаимно просты, d можно представить в виде $d = d_0d_ad_b$, где d_a и d_b — наибольшие общие делители пары d, a^2 и пары d, b^2 соответственно. При этом d_0 взаимно просто и с a, и с b. Если Na^2 и Nb^2 делятся на $d = d_0d_ad_b$, то N обязано делиться и на $d_b d_0$, и на $d_a d_0$. Поскольку d_a и d_b взаимнопросты вслед за a и b, N делится и на $d = d_b d_a d_0$, что и требовалось.

б) Возьмем натуральное $M > 1$ так, что $M^2 > d > (M-1)^2$. Выпишем остатки от деления на d чисел $ka + ib$ для всех пар (k, i) натуральных чисел, не больших M. В силу $M^2 > d$ по принципу Дирихле найдется два одинаковых остатка для различных пар (k_1, i_1), (k_2, i_2). Значит $(k_1 - k_2)a + (i_1 - i_2)b$ делится на d. Тогда на d делится и

$$|k_1 - k_2|^2 a^2 - |i_1 - i_2|^2 b^2 = \big((k_1 - k_2)a + (i_1 - i_2)b\big)\big((k_1 - k_2)a - (i_1 - i_2)b\big).$$

Поскольку $|k_1 - k_2|^2$, $|i_1 - i_2|^2$ не больше $(M-1)^2 < d$, то их и можно взять в качестве k^2, i^2, если показать, что ни одно из них не ноль. Сделаем это. Одновременно k, i в ноль обратиться не могут, поскольку были выбраны различные пары (k_1, i_1), (k_2, i_2). Если же одно из них оказалось бы равно нулю, пусть i, то на d делилось бы ka, а значит и ka^2, kb^2. Теперь из пункта а) с $N = k$ следовало бы, что $N = k$ делится на d, но в силу показанного выше $k^2 < d$ это давало бы $k^2 < d \leqslant k$, что невозможно. Значит, $k, i \neq 0$.

в) По пункту б) для каких-то натуральных $k, i < d$ число $k^2a^2 - i^2b^2$ делится на d, по условию $i^2(a^2+b^2)$ и $k^2(a^2+b^2)$ тоже делятся на d. Теперь и сумма $k^2a^2 + i^2a^2 = (k^2+i^2)a^2$, и разность $-i^2b^2 - k^2b^2 = -(k^2+i^2)b^2$ делятся на d. Применяя пункт а) с $N = k^2+i^2$, получаем, что $k^2 + i^2$ делится на d.

г) Повторим доказательство пункта б), заметив лишь дополнительно, что $k^2 = |k_1 - k_2|^2$, $i^2 = |i_1 - i_2|^2$ не больше $(M-1)^2 < d$, то есть $k^2 + i^2 \leqslant d - 1 + d - 1 < 2d$. Повторим доказательство пункта в), убедившись лишь, что натуральное число k^2+i^2, которое делится на d, всё ещё меньше $2d$. Значит оно равно d.

Примечание. Формулировка пункта г) найдена в Журнале элементарной математики, т.2, №13, 18 Решение изложенное там, конструктивно, не требует особых знаний, но крайне громоздко своими алгебраическими выкладками. Идея изложенного здесь доказательства восходит к Лагранжу. Подробнее, и про доказательство Лагранжа, и про числа, представимые в виде суммы квадратов, можно посмотреть, например, в Кванте, №3, 1999, стр.22.