

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

10-11 класс

10-11.1. 20 игроков играли в пейнтбол. У каждого было по 7 шариков с краской. В конце все отстреляли все шарики. В Андрея попали 10 раз, а в Вову попало меньше шариков, чем во всех остальных. Насколько много шариков могли попасть в Вову, если ни один шарик не попал в двух и более игроков.

10-11.2. Дано натуральное число $n > 1$. Пусть $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ — все натуральные делители числа n . Оказалось, что $n = (d_2 - d_1)(d_3 - d_2) \dots (d_k - d_{k-1})$. Найдите все возможные значения числа n .

10-11.3. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается отрезка B_1C_1 в точке N . Описанная окружность треугольника BIN пересекает вторично сторону AB в точке K . Докажите, что точки C, N, K лежат на одной прямой.

10-11.4. Пусть b_1, b_2, \dots, b_n ($n > 3$) — конечная возрастающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой — натуральное число. Известно, что все члены этой прогрессии можно разбить на k ($k \geq 3$) множеств так, что суммы чисел b_i , попавших в эти множества, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные пары (n, k) .

10-11.5. В стране n городов и k авиакомпаний ($n > k$). Некоторые города связаны односторонними авиалиниями. Известно, что из каждого города выходит ровно одна авиалиния каждой авиакомпании и в каждый город ведёт ровно одна авиалиния каждой из k компаний. В стране есть Жулик, который летает на самолётах только одной из авиакомпаний (но неизвестно какой), и есть Детектив, который пытается его поймать. Каждый день, рано утром, Детектив один раз может позвонить шерифу одного из n городов и попросить проверить, находится ли преступник в его городе. В случае положительного ответа Жулика ловят. В случае отрицательного ответа вечером того же дня Жулик совершает перелёт из одного города в другой. Из города нельзя перелететь в тот же город.

а) Предположим, что Детективу неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Сможет ли он поймать Жулика за конечное число дней? (2 балла)

б) Детективу всё ещё неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Предположим также, что для любой выбранной компании Жулик сможет за несколько дней попасть из любого города в любой, пользуясь авиалиниями этой компании. За какое наименьшее число вопросов Детектив гарантированно поймаёт Жулика? (2 балла)

в) В первый день поиска Жулика, до того, как Детектив успел выбрать город, в который будет звонить, ему принесли карту, на которой указаны все авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Пусть $k = 2$. Докажите, что для поимки Жулика Детективу достаточно $\lceil \frac{3n}{2} \rceil$ дней. (4 балла)

г) Верно ли, что существует бесконечно много пар (n, k) натуральных чисел, для которых маршруты авиакомпаний могут быть устроены так, что даже глядя на карту, Детектив не сможет поймать Жулика в течение n дней? (6 баллов)

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

9 класс

9.1. Вовочка выписал все десятизначные числа, которые делятся на 6 и в записи которых есть только цифры 0 и 7. Сколько таких чисел?

9.2. В шахматном турнире, проходящем по круговой системе в один круг (то есть каждые два участника сыграли по одной партии), участвовало 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. По окончании турнира каждый сделал заявление: «Все, кого я победил на этом турнире, — лжецы.» Известно, что единоличным победителем турнира стал рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей могло участвовать в турнире? В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

9.3. Дан неравносторонний треугольник ABC . Рассмотрим все такие пары точек (M, N) , где M лежит внутри треугольника, N — на его границе, а ломаная AMN делит треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра. Найдите геометрическое место точек M .

9.4. Незнайка нарисовал две параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$ и утверждает, что любая точка параболы $y = x^2 + 1$ равноудалена от обеих парабол $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$. Прав ли Незнайка? Расстоянием от точки до параболы назовём наименьшее из попарных расстояний от этой точки до всевозможных точек параболы.

9.5. Пусть задано натуральное число k . Будем говорить, что набор из 4 натуральных чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) *k-расивый*, если этот набор удовлетворяет равенству

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - kx_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Минимальным назовём *k-расивый* набор (a_1, \dots, a_4) с самой маленькой среди всех *k-расивых* наборов суммой $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и у которого $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$.

а) Докажите, что если набор (a_1, a_2, a_3, a_4) *k-расивый*, то $(ka_2a_3a_4 - a_1, a_2, a_3, a_4)$ тоже *k-расивый*. (2 балла)

б) Докажите, что для всякого минимального *k-расивого* набора (a_1, a_2, a_3, a_4) выполнено $ka_3a_4 \leq 4$. (4 балла)

в) Найдите все минимальные *k-расивые* наборы при $k > 2$. (3 балла)

г) Докажите, что если *k-расивый* набор есть, то имеется и бесконечная серия *k-расивых* наборов. (3 балла)

д) Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения $x_1^2 + x_2^2 + 2 = 4x_1x_2$ с $x_1 > 100$. (2 балла)

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

8 класс

8.1. Вдоль круговой дорожки по часовой стрелке стоят флажки A, B, C, D . Толя начал беговую тренировку от флажка A и там же её закончил. Во время бега он несколько раз разворачивался и бежал в противоположную сторону. Все развороты происходили рядом со флажками. Известно, что рядом с каждым из флажков A, B, D он побывал ровно по 5 раз (в это число включены начало и конец пути). Сколько раз он мог побывать рядом с флажком C ? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.

8.2. Коленька любит порядок. Вечером он свои игрушки раскладывает по коробочкам, коробочки — по ящикам, ящики — в шкаф. Няня Коленьки внимательно следит, как Коленька разложил игрушки. В один из дней няня заметила, что Коленька использовал больше коробочек, чем суммарное количество игрушек в любом ящике. Докажите, что в этот день Коленька использовал больше ящиков, чем количество игрушек хотя бы в одной из коробочек. Некоторые коробочки или ящики могут быть пустыми.

8.3. Действительные числа x, y, z таковы, что выполняются равенства

$$x^3 - xy + y^3 = y^3 - yz + z^3 = z^3 - zx + x^3.$$

Докажите, что среди чисел x, y, z есть равные друг другу.

8.4. На продолжении стороны BC за точку C и на диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки K и R соответственно. Угол CDK в два раза больше угла RDA . Угол CRK равен 15° . Найдите DK/CK .

8.5. Многоугольник называется *правильным*, если все его стороны равны и все его углы равны. Вершины правильного n -угольника белые. Два игрока, Петя и Вася, играют в следующую игру. Они по очереди выбирают одну из белых вершин и красят её в чёрный цвет. Начинает Петя. Проигрывает тот игрок, после хода которого можно будет найти несколько чёрных вершин, образующих правильный многоугольник (количество углов в котором может быть меньше n). Кто из игроков, Петя или Вася, может выиграть вне зависимости от действий противника, если:

а) $n = 13$? (2 балла)

б) $n = 2026$? (2 балла)

в) $n = 3039$? (5 баллов)

г) $n = 36$? (5 баллов)

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

7 класс

7.1. Что больше: произведение всех двузначных чисел или сумма всех десятизначных?

7.2. Вдоль прямой дороги слева направо расположены пункты A, B, C, D, E . Кратчайший путь, начинающийся в B и проходящий через все пункты, имеет длину 3200 метров. Аналогичный путь, начинающийся в C или в D , будет иметь длину 3500 метров. Известно, что расстояние от A до B на 400 метров больше, чем от B до C . Найдите расстояние от C до D .

7.3. Паутинка имеет форму квадрата 6×6 клеток. Все углы клеток назовём *узелками*. В центральном узелке паутинки расположен домик паука Аркадия, в котором он сейчас сидит. Во всех остальных узелках прилипло по мухе. Аркадий может переместиться из одного узелка в другой вдоль диагонали одной клетки (но не стороны!). Какое наибольшее число мух может собрать Аркадий из паутинки, если он не хочет проходить один и тот же узелок дважды, а в конце пути хочет снова оказаться в своём домике?

7.4. Из вершины A острого угла бильярдного стола в форме прямоугольного треугольника ABC вдоль биссектрисы этого угла катится шар. Сначала он отражается от бортика в точке P , лежащей на катете BC , затем в точке Q на гипотенузе AC , после чего попадает напрямик в вершину B . Бильярдный шар отражается от бортиков по правилу «угол падения равен углу отражения». Докажите, что отрезок AP длиннее отрезка PC .

7.5. Есть 10 натуральных чисел, не превосходящих 10, общая сумма которых чётна. Дополнительные условия на набор чисел указаны в нижеследующих пунктах. В каждом пункте нужно ответить на вопрос: «Всегда ли при данных условиях все 10 чисел можно разбить на 2 группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась сумме чисел второй группы?»

а) Нет дополнительных условий. (2 балла)

б) Девять чисел не превосходят 2, а десятое число — нечётное. (3 балла)

в) В наборе есть числа 1, 2, 3 и 4 хотя бы одному разу, остальные могут отличаться. (4 балла)

г) Первое число не превосходит 1, второе — не превосходит 2, третье — не превосходит 3, и так далее, до десятого числа, которое не превосходит 10. (5 баллов)

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

6 класс

6.1. В левой части равенства $ВУЗА+КК=2026$ одинаковые буквы заменили на равные цифры, разные — на разные. Найдите все цифры, которым может равняться буква У.

6.2. 7 февраля 2026 года часы со стрелками показывали правильное время 11:00. Каждый час реального времени часы отставали на 3 минуты. Когда в следующий раз впервые (укажите дату и время) часы снова покажут правильное время?

6.3. У Даниила есть чашечные весы, которые показывают, какая из двух групп монет тяжелее (либо равенство), но не показывают на сколько. У него есть 9 монет, из которых две фальшивых. Даниил знает, что настоящие монеты весят одинаково, одна из фальшивых на 1 грамм тяжелее настоящей, а другая фальшивая на 1 грамм легче настоящей. Можно ли за 2 взвешивания на таких весах гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

6.4. Учитель придумал несколько заданий и провёл викторину в трёх классах. Каждая команда получала один балл, если первой давала правильный ответ. В 6А классе дети поделились на 5 команд, в 6Б — на 6, а в 6В — на 7 команд. В итоге в каждом классе не было неправильных ответов, а все команды (даже из разных классов) набрали разное число баллов. Какое наименьшее число заданий мог придумать учитель?

6.5. Девочка Алина учится играть в шахматы. Она знает, что ладьи бьют на любое число клеток по вертикали и по горизонтали. Но она думает, что чёрные ладьи могут перепрыгивать через другие фигуры, а белые — нет. У неё есть 9 белых ладей и ведро чёрной краски (с помощью которого она может превращать белые ладьи в чёрные). Её новогоднее желание сбудется, если она расставит эти ладьи на шахматной доске, чтобы каждая была ровно 3 другие (не важно, чёрные или белые) ладьи. Может ли у неё это получиться?

6.6. Найдите все точные квадраты такие, что произведение их цифр равно количеству их натуральных делителей. Напомним, что точным квадратом называется квадрат натурального числа.

