РЕШЕНИЯ

5 класс

5.1. *На доске записано число 0. За одну операцию разрешено либо увеличить число, записанное на доске на 2025, либо уменьшить на 2026. Как получить такими операциями на доске число 1?*

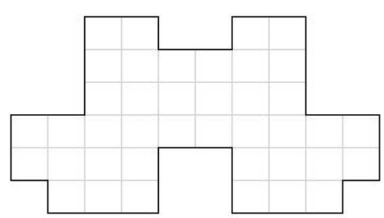
Решение. Сначала увеличим число на 2025. Затем 2024 раза проделаем пару операций: увеличим на 2025 и уменьшим на 2026. За каждую пару операций число уменьшается на 1. В итоге оно уменьшится на 2024 и станет 1.

5.2. *У бабы Любы есть большой чайник с чаем и два типа кружек – большие и маленькие. Оказалось, что всего чая хватит разлить без остатка в 2 больших кружки и 9 маленьких, а также весь чай без остатка можно разлить в 5 больших кружек и 3 маленьких. Во сколько раз большая кружка вмещает больше чая, чем маленькая?*

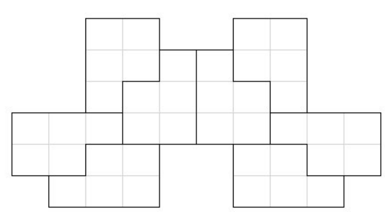
Решение. Если выпить 2 большие и 3 маленькие кружки из каждого описываемого чаепития, окажется, что 3 большие кружки вмещают столько же, сколько и 6 маленьких. А значит одна большая вмещает 2 маленьких.

Ответ. В 2 раза.

5.3. *Разрежьте фигуру на рисунке на 8 равных частей.*



Решение.



Комментарий. Придумать разрезание можно так. Сначала разделить по оси симметрии фигуру на 2 равные части. Потом каждую из частей разбить на две равные. А затем каждую — ещё на две.

5.4. *Пароль к ноутбуку родителей — трёхзначное число. Три брата: Андрей, Борис и Виктор пытались этот пароль подобрать. Андрей ввёл число 123, Борис — 214, Виктор*

— 413. Каждый ребёнок угадал ровно 2 цифры в пароле, причём ровно у одной из них он угадал ещё и место, на котором она стоит. Каким же, всё-таки, был этот пароль?

Решение. Назовём цифру, угаданную вместе с местом, *быком*, а угаданную, но не стоящую на своём месте — *коровой*. Если у Андрея бык это 1, то у Бориса не могут быть быками ни 1, ни 2, а значит это 4. Но у Виктора 4 и 1 не быки из-за Андрея, а 3 не бык из-за Бориса. Значит, Андрей угадал не 1. Если у Андрея бык это 2, то у Бориса быки не 1 и не 2, а значит — также 4. Но тогда у Виктора бык не может быть на втором и третьем местах, а 4 уже бык у Бориса. Значит, у Андрея бык — это цифра 3. Если корова Виктора это 1, то она стоит на первом месте, и у Андрея она бык, чего не может быть по нашему предположению. Значит, корова Виктора — это 4, и число оканчивается на 43. Тогда у Бориса быком может быть только 2, и искомое число — 243. Заметим, что оно подходит под все три утверждения.

Ответ. 243.

5.5. *У директора Даниила Юрьевича учится 105 пятиклассников. Он должен провести три игры: на первую он должен разбить всех детей на команды по 3 человека, на вторую — на команды по 5 человек, а на третью — на команды по 7 человек. Может ли он это сделать таким образом, чтобы никакие два человека не были в одной команде больше одного раза?*

Решение. Пусть каждый ребёнок возьмёт кубик $1 \times 1 \times 1$ и из этих кубиков составим параллелепипед $3 \times 5 \times 7$. Тогда разбиение на параллелепипеды $3 \times 1 \times 1$ будет давать разбиение на команды по 3 человека, на параллелепипеды $1 \times 5 \times 1$ — на команды по 5, а на параллелепипеды $1 \times 1 \times 7$ — на команды по 7. Очевидно, что такое разбиение будет удовлетворять условиям задачи.

Ответ. Может.

5.6. *У Кати изначально есть большая куча из 2026 конфет. Она может разделить одну кучу на три меньших (не обязательно равных, но обязательно непустых). Также она может взять любую кучу, съесть оттуда одну конфету, а все оставшиеся переложить в какую-то другую кучу. Может ли Катя сделать так, чтобы все кучи конфет, которые перед ней остались, содержали по одной конфете?*

Решение. Посмотрим на сумму количества куч и конфет. Если мы съедаем одну конфету и перекладываем конфеты в другую кучу, то данная сумма уменьшается на 2, то есть не меняет чётность, а если мы делим одну кучу на 3, то данная величина увеличивается на 2, то есть также не меняет чётность. Получается, что изначально рассмотренная сумма была 2027, а если бы действия Кати увенчались успехом, она стала бы суммой двух равных величин (из-за того, что в каждой куче по одной конфете), то есть чётным числом, что невозможно по доказанному выше.

Ответ. Не может.

6 класс

6.1. *В левой части равенства ВУЗА+КК=2026 одинаковые буквы заменили на равные цифры, разные — на разные. Найдите все цифры, которым может равняться буква У.*

Решение. Если В = 2, то К может равняться только 1. Но $2026 - 11 = 2015$, а тогда З = К = 1. Значит, В = 1, но тогда, раз КК < 100, то У обязательно будет 9.

Ответ. 9.

6.2. *7 февраля 2026 года часы со стрелками показывали правильное время 11:00. Каждый час реального времени часы отставали на 3 минуты. Когда в следующий раз впервые (укажите дату и время) часы снова покажут правильное время?*

Решение. Часы снова станут показывать правильное время, когда время их отставания составит 12 часов = 720 минут. Если каждый час они отстают на 3 минуты, это время набежит за 720/3=240 часов = 10 дней. А 10 дней с момента указанного в условии наступит 17 февраля в 11:00.

Ответ. 17 февраля 11:00.

6.3. *У Даниила есть чашечные весы, которые показывают, какая из двух групп монет тяжелее (либо равенство), но не показывают на сколько. У него есть 9 монет, из которых две фальшивых. Даниил знает, что настоящие монеты весят одинаково, одна из фальшивых на 1 грамм тяжелее настоящей, а другая фальшивая на 1 грамм легче настоящей. Можно ли за 2 взвешивания на таких весах гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?*

Решение. Занумеруем монеты А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И. Первым взвешиванием взвесим монеты А, Б и В с монетами Г, Д и Е. Если на весах равенство, то либо не использована ни одна фальшивая монета(*), либо использованы обе(**), причём они на одной чаше. В этом случае взвесим Ж и З. Если во втором взвешивании неравенство, то вариант (**) был невозможен, и мы в варианте (*), в котором нашли сразу 6 настоящих монет. А если Ж=З, то в этом взвешивании монеты точно настоящие. Если в первом взвешивании неравенство, то на весах присутствует хотя бы одна фальшивая монета, и вторым взвешиванием мы всё также взвесим Ж и З. Если неравенство и во втором взвешивании, то среди этих монет две фальшивых, и настоящая монета — И, а если во втором взвешивании равенство, то и Ж, и З — настоящие монеты.

Ответ. Можно.

6.4. *Учитель придумал несколько заданий и провёл викторину в трёх классах. Каждая команда получала один балл, если первой давала правильный ответ. В 6А классе дети поделились на 5 команд, в 6Б — на 6, а в 6В — на 7 команд. В итоге в каждом классе не было неправильных ответов, а все команды (даже из разных классов) набрали разное число баллов. Какое наименьшее число заданий мог придумать учитель?*

Решение. Всего команд было 18. Если выстроить все команды в порядке возрастания баллов, то каждая следующая набрала хотя бы на 1 балл больше, чем предыдущая, а поэтому все 18 команд в сумме набрали не менее, чем $0+1+2+\ldots+17 = 153$ балла. Поскольку мы сложили баллы в трёх играх, отсюда следует, что в одной игре разыгрывалось не меньше, чем 153/3=51 балл. Пример можно построить так: в первой игре команды набирают 15, 16, 17, 1 и 2 балла, во второй — 3, 4, 5, 12, 13 и 14 баллов, а в третьей — 0, 6, 7, 8, 9, 10 и 11 баллов.

Ответ. 51 задание.

6.5. *Девочка Алина учится играть в шахматы. Она знает, что ладьи бьют на любое число клеток по вертикали и по горизонтали. Но она думает, что чёрные ладьи могут перепрыгивать через другие фигуры, а белые — нет. У неё есть 9 белых ладей и ведро чёрной краски (с помощью которого она может превращать белые ладьи в чёрные). Её новогоднее желание сбудется, если она расставит эти ладьи на шахматной доске, чтобы каждая била ровно 3 другие (не важно, чёрные или белые) ладьи. Может ли у неё это получиться?*

Решение.

ч		б	ч				
ч	ч	б					
	ч	б	ч				

Ответ. Может.

6.6. *Найдите все точные квадраты такие, что произведение их цифр равно количеству их натуральных делителей. Напомним, что точным квадратом называется квадрат натурального числа.*

Решение. Если исходное число $n = k^2$ при некотором натуральном k, то все делители числа n, кроме числа k бьются на пары различных чисел вида d и n/d. А значит, количество делителей у квадрата обязано быть нечётным. Из-за этого произведение цифр может быть нечётным только в случае, если все цифры в числе нечётны. То есть, в частности, последняя цифра является нечётной. Но тогда представим, что оно оканчивается на АБ и запишем возведение в квадрат в столбик. На предпоследнем месте произведения будет стоять последняя цифра числа 2АБ, то есть чётная цифра, а ещё туда будет переноситься цифра десятков в квадрате цифры Б из последнего разряда. Но при нечётных Б все они чётны. $1^2 = 1$, $3^2 = 3$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$. Получается, что в квадрате нечётного числа предпоследняя цифра (при её наличии) будет чётной. И единственный шанс, чтобы произведение было нечётным — это отсутствие предпоследней цифры в этом квадрате. Единственными кандидатами в таком случае оказываются только $n = 1$ и $n = 3$ из которых простой проверкой получаем, что второй вариант невозможен, а первый — является ответом.

Ответ. 1.

7 класс

7.1. *Что больше: произведение всех двузначных чисел или сумма всех десятизначных?*

Решение. Все десятизначные числа меньше 10^{10} и их количество меньше 10^{10}, поэтому сумма — меньше 10^{20}. Все двузначные числа не меньше 10, а их количество равно 90, поэтому произведение — не меньше 10^{90}.

Ответ. Произведение двузначных.

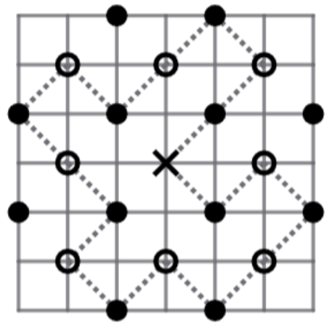
7.2. *Вдоль прямой дороги слева направо расположены пункты A, B, C, D, E. Кратчайший путь, начинающийся в B и проходящий через все пункты, имеет длину 3200 метров. Аналогичный путь, начинающийся в C или в D, будет иметь длину 3500 метров. Известно, что расстояние от A до B на 400 метров больше, чем от B до C. Найдите расстояние от C до D.*

Решение. Кратчайший путь со стартом в каком-то из некрайних пунктов должен пройти сначала через один из крайних, затем через другой. Таким образом, любой путь по длине не меньше расстояния от старта до края плюс расстояние между крайними пунктами — именно такой путь и будет кратчайшим. Заметим, что путь из C не может начинаться вправо, так как $CE + AE > DE + AE$, но кратчайшие пути из C и D имеют одинаковую длину. Значит, путь из C — влево, а из D — вправо. А так как путь из B короче, чем из D, то из B — тоже влево. Теперь можно найти длины отрезков: $BC = (AC + AE) - (AB + AE) = 3500 - 3200 = 300$ м, $AB = BC + 400 = 700$ м. $AE = (AB + AE) - AB = 3200 - 700 = 2500$ м. $DE = (DE + AE) - AE = 3500 - 2500 = 1000$ м, и, наконец, $CD = AE - AB - BC - DE = 3500 - 700 - 300 - 1000 = 500$ м.

Ответ. 500 метров.

7.3. *Паутинка имеет форму квадрата 6×6 клеток. Все углы клеток назовём узелками. В центральном узелке паутинки расположен домик паука Аркадия, в котором он сейчас сидит. Во всех остальных узелках прилипло по мухе. Аркадий может переместиться из одного узелка в другой вдоль диагонали одной клетки (но не стороны!). Какое наибольшее число мух может собрать Аркадий из паутинки, если он не хочет проходить один и тот же узелок дважды, а в конце пути хочет снова оказаться в своём домике?*

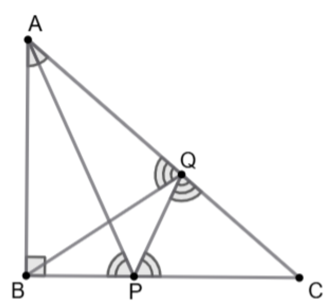
Решение. Раскрасим все 49 узелков в шахматном порядке в красный и синий цвет. Пусть углы большого квадрата будут красным. В красном узелке будет и домик Аркадия. Легко заметить, что переползая по диагонали клетки, Аркадий всегда будет оставаться в красных узелках. Аркадий не может достигнуть углов большого квадрата, так как при следующем переползании он вернётся в узелок, в котором уже был. Остальные красные узелки раскрасим в белый и чёрный цвета, как показано на рисунке. В любом маршруте Аркадия белые и чёрные узелки будут чередоваться. Следовательно, Аркадий посетит поровну белых и чёрных узелков (домик считаем белым узелком). Всего белых — 9, чёрных — 12, поэтому наибольшее количество мух равно $9 + 9 - 1 = 17$, так как домик — не муха.



Ответ. 17.

7.4. *Из вершины A острого угла бильярдного стола в форме прямоугольного треугольника ABC вдоль биссектрисы этого угла катится шар. Сначала он отражается от бортика в точке P, лежащей на катете BC, затем в точке Q на гипотенузе AC, после чего попадает прямиком в вершину B. Бильярдный шар отражается от бортиков по правилу «угол падения равен углу отражения». Докажите, что отрезок AP длиннее отрезка PC.*

Решение. Заметим, что $\angle QPC = \angle APB = 90^\circ - \angle BAP = 90^\circ - \angle PAC$, из чего следует, что $\angle PQC = 180^\circ - \angle QPC - \angle ACP = 90^\circ + (\angle PAC - \angle ACP)$. Заметим, что угол PQC должен быть острым, иначе после второго отражения шара (в точке Q) он бы полетел в ту полуплоскость относительно PQ, в которой лежит точка C. Но тогда бы он не попал в B. Это означает, что разность углов в скобках отрицательная. Следовательно, $\angle PAC < \angle ACP$. В треугольнике ACP напротив большего угла лежит большая сторона, значит, $PC < AP$, что и требовалось доказать.



7.5. *Есть 10 натуральных чисел, не превосходящих 10, общая сумма которых чётна. Дополнительные условия на набор чисел указаны в нижеследующих пунктах. В каждом пункте нужно ответить на вопрос: «Всегда ли при данных условиях все 10 чисел можно разбить на 2 группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась сумме чисел второй группы?»*

а) *Нет дополнительных условий.* *(2 балла)*

б) *Девять чисел не превосходят 2, а десятое число — нечётное.* *(3 балла)*

в) *В наборе есть числа 1, 2, 3 и 4 хотя бы одному разу, остальные могут отличаться.* *(4 балла)*

г) *Первое число не превосходит 1, второе — не превосходит 2, третье — не превосходит 3, и так далее, до десятого числа, которое не превосходит 10.* *(5 баллов)*

Решение. а) Не всегда. Например, подойдёт набор чисел 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3. Сумма чисел равна 28. Поэтому нужно разбивать на суммы, равные 14. Но одна из сумм будет заведомо делиться на 3.

б) Всегда. Среди девяти чисел нечётное число единиц. Объединим их в пары и будем считать, что это просто двойки. Останется одна лишняя единица. Пусть сумма всех чисел равна $2k$. Заметим, что она не меньше удвоенного десятого числа, так как сумма первых 9 чисел не меньше 9. Но тогда можно получить k из десятого числа, некоторого количества двоек и, возможно, единицы. Сумма остальных чисел тоже будет равна k.

в) Всегда. Расположим 6 остальных чисел в порядке возрастания. Далее, также в порядке возрастания, будем распределять их по двум группам, каждый раз определяя число в группу с меньшей суммой, а если суммы равны, то в любую из них. В частности, сначала группы пусты, и меньшее число пойдёт в любую из групп. В результате 6 чисел будут разбиты на группы, разность сумм в которых не превосходит наибольшего числа в наборе, то есть не превосходит 10. С другой стороны, эта разность чётна, так как $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ — чётное число, следовательно, сумма рассматриваемых 6 чисел тоже чётна, а чётное число может быть разбито только на два слагаемых одинаковой чётности. Значит, эта разность равна 0, 2, 4, 6, 8 или 10. Любую из этих разностей можно получить первыми четырьмя гирями: $(1 + 4) - (2 + 3) = 0$, $(1 + 2 + 3) - (4) = 2$, $(1 + 2 + 4) - (3) = 4$, $(1 + 3 + 4) - (2) = 6$, $(2+3+4)-(1) = 8$, $(1+2+3+4)-(0) = 10$. Получив соответствующую разность, уравняем суммы.

г) **Первое решение.** Заметим, что такой набор чисел удовлетворяет ещё одному условию: каждое число не превосходит суммы всех чисел с меньшим номером плюс 1 (*). Тогда воспользуемся алгоритмом, похожим на тот, что использовался в предыдущем пункте. Будем брать числа по уменьшению их номера и определять в группу с меньшей суммой (при равенстве сумм — в любую группу). Тот момент, когда группа, в которой сумма больше, меняется, назовём критическим. Также критическим моментом будем считать ситуацию, в которой суммы становятся или перестают быть равными. Заметим, что в критический момент разность двух сумм не превосходит последнего рассмотренного числа. Далее мы будем определять числа в меньшую группу, и, в силу (*), должно произойти одно из двух — либо ещё один критический момент, либо числа закончатся, а суммы будут отличаться на 1. Однако вторая ситуация противоречит условию задачи, т.к. общая сумма чисел была бы нечётной. Следовательно, числа закончатся в критический момент. Но так как последнее число равно 1, то суммы чисел в группах отличаются не больше чем на 1. Опять же, в силу чётности — суммы в группах равны.

Второе решение. Будем вести индукцию по количеству чисел. Количество чисел равно n. Необходимо решить задачу при $n = 10$. Обозначим числа за $a_1, \ldots, a_n$. Условие на числа: $1 \leqslant a_k \leqslant k$, а ещё $a_1 + \ldots + a_k$ — чётно. Докажем утверждение: можно расставить плюсы и минусы между числами так, чтобы значение выражения равнялось 0. База индукции: $n = 1$. Выполнить условия на числа невозможно. $n = 2$. Есть ровно 1 набор чисел: $a_1 = a_2 = 1$. Тогда искомое выражение $a_1 - a_2 = 0$. Предположим, что такое выражение можно сделать при любом $n < k$. Теперь рассмотрим набор чисел $a_1, \ldots, a_k$. Заметим, что модуль разности двух последних чисел не больше $k-1$. Тогда сделаем новый набор: 1) если эта разность равна 0, то просто уберём 2 последних числа — сумма в наборе останется чётной. Тогда из чисел $a_1, \ldots, a_{k-2}$ можно сделать требуемое выражение и добавить к нему $+a_{k-1} - a_k$. 2) если эта разность натуральна, то она имеет ту же чётность, что и сумма $a_{k-1} + a_k$. Тогда уберём 2 последних числа и вместо предпоследнего поставим эту разность — условия попрежнему будут выполнены. Из полученных чисел, по предположению, можно получить 0. Теперь вместо последнего числа в ней подставим разность и раскроем модуль — требуемые выражение получено и для k чисел. Утверждение доказано. Следовательно, между 10 числами можно расставить плюсы и минусы так, чтобы получилось 0. А, значит, можно разбить на 2 одинаковые суммы.

Ответ. а) Не всегда; б, в, г) Всегда.

8 класс

8.1. *Вдоль круговой дорожки по часовой стрелке стоят флажки A, B, C, D. Толя начал беговую тренировку от флажка A и там же её закончил. Во время бега он несколько раз разворачивался и бежал в противоположную сторону. Все развороты происходили рядом с флажками. Известно, что рядом с каждым из флажков A, B, D он побывал ровно по 5 раз (в это число включены начало и конец пути). Сколько раз он мог побывать рядом с флажком C? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Каждый нечётный раз он рядом с A или C, каждый чётный — рядом с B или D. Так как начало и конец пути — флажок A, общее количество A и C на 1 больше, чем B и D. Следовательно, рядом с C Толя побывал ровно 6 раз. Для этого он мог пробежать в порядке $ABCBCBCBCBCDCDADADADA$.

Ответ. 6 раз.

8.2. *Коленька любит порядок. Вечером он свои игрушки раскладывает по коробочкам, коробочки — по ящикам, ящики — в шкаф. Няня Коленьки внимательно следит, как Коленька разложил игрушки. В один из дней няня заметила, что Коленька использовал больше коробочек, чем суммарное количество игрушек в любом ящике. Докажите, что в этот день Коленька использовал больше ящиков, чем количество игрушек хотя бы в одной из коробочек. Некоторые коробочки или ящики могут быть пустыми.*

Решение. Пусть у Коленьки N игрушек, и он использовал A коробочек и B ящиков. Тогда в каком-то ящике оказалось не меньше N/B игрушек, и, по условию, $A > N/B$. Тогда $AB > N$. При этом, по принципу Дирихле, в какой-то коробочке количество игрушек не превосходит N/A, а из неравенства выше следует, что $B > N/A$.

8.3. *Действительные числа x, y, z таковы, что выполняются равенства*

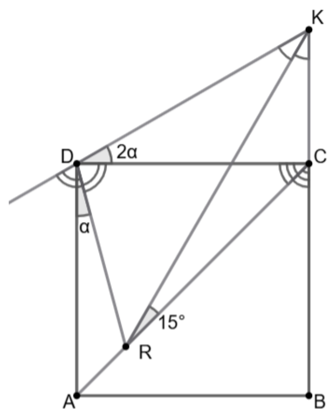
$$x^3 - xy + y^3 = y^3 - yz + z^3 = z^3 - zx + x^3.$$

Докажите, что среди чисел x, y, z есть равные друг другу.

Решение. Допустим, что нет равных чисел среди x, y, z. Из равенства $x^3 - xy + y^3 = y^3 - yz + z^3$ получаем $y(z - x) = z^3 - x^3$, что даёт равенство $y = z^2 + zx + x^2$. Можно преобразовать данное выражение в виде $y = \frac{1}{2}(x^2 + z^2 + (x + z)^2)$, откуда следует, что $y \geqslant 0$. Аналогично получаем, что $x = y^2 + yz + z^2$ и $z = x^2 + xy + y^2$, причём $x, z \geqslant 0$. Далее, вычтем выражения для x и y друг из друга. Получится $x - y = y^2 - x^2 + z(y - x)$, откуда $(y - x)(1 + x + y + z) = 0$. Однако обе эти скобки не равны нулю, так как числа не равны друг другу и положительны. Противоречие. Следовательно, среди чисел x, y, z есть равные.

8.4. *На продолжении стороны BC за точку C и на диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки K и R соответственно. Угол CDK в два раза больше угла RDA. Угол CRK равен $15°$. Найдите DK/CK.*

Решение. Заметим, что $\angle CDR = 90^\circ - \angle ADR = 90^\circ - \frac{\angle CDK}{2} = \frac{180^\circ - \angle CDK}{2}$, поэтому DR — биссектриса внешнего угла треугольника CDK. Луч CR — биссектриса прямого угла — внешнего угла треугольника CDK. Тогда точка R — точка пересечения внешних биссектрис (центр вневписанной окружности), следовательно, луч KR содержит биссектрису угла CKD. При этом $\angle CKR = \angle ACB - \angle CRK = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, и тогда $\angle CKD = 60^\circ$, $\angle CDK = 30^\circ$. Катет напротив угла 30° вдвое меньше гипотенузы, поэтому $DK/CK = 2$.



Ответ. $DK/CK = 2$.

8.5. *Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны. Вершины правильного n-угольника белые. Два игрока, Петя и Вася, играют в следующую игру. Они по очереди выбирают одну из белых вершин и красят её в чёрный цвет. Начинает Петя. Проигрывает тот игрок, после хода которого можно будет найти несколько чёрных вершин, образующих правильный многоугольник (количество углов в котором может быть меньше n). Кто из игроков, Петя или Вася, может выиграть вне зависимости от действий противника, если:*

а) $n = 13$? *(2 балла)*

б) $n = 2026$? *(2 балла)*

в) $n = 3039$? *(5 баллов)*

г) $n = 36$? *(5 баллов)*

Решение. а) Выиграет второй игрок. Заметим, что и правильный n-угольник, и правильный k-угольник вписываются в одну и ту же окружность. Равные стороны будут стягивать равные дуги. Поскольку n-угольник разбил окружность на равные дуги, стороны k-угольника будут стягивать одинаковое количество таких дуг. Из этого следует, что n делится на k. Это утверждение будет дальше использоваться во всех пунктах. Теперь перейдём к описанию стратегии Васи. 13 — простое число, поэтому ни один правильный многоугольник не возникнет, пока не будет сделано 13 ходов. А 13-й ход делает Петя.

б) Выиграет второй игрок. Так как $n = 2 \cdot 1013$, а число 1013 — простое, то игроки могут получить лишь 1013- и 2026-угольники. Но если 2026-угольник получен, то получен и 1013-угольник. Поэтому цель Васи — не завершить ни один из двух 1013-угольников раньше

Пети. Для этого ему нужно лишь не делать последний ход в них. Это может продолжаться максимум 2024 хода (и последний ход как раз за Васей), а на 2025 ходу Петя всё равно проиграет, если не сделал этого раньше.

в) Выиграет второй игрок. Заметим, что $n = 3 \cdot 1013$, и теперь можно получить 3-, 1013- и 3039-угольник. При этом достаточно следить лишь за треугольниками и 1013-угольниками. Кроме того, три вершины треугольника принадлежат трём разным 1013-угольникам (если бы 2 из них принадлежали одному 1013-угольнику, то и третья бы принадлежала — но тогда 1013 делилось бы на 3). Теперь переходим к стратегии Васм. Пусть после каждого хода Пети Вася всегда выбирает вершину того же треугольника. Тогда Петя обязан будет выбирать новый треугольник каждым ходом, так как иначе получит полностью чёрный треугольник. При этом у Васи всегда есть выбор из двух вершин треугольника, а, значит, и выбор, вершину какого из двух разных 1013-угольников он покрасит. Ситуация, когда Вася проигрывает, покрасив любую из двух белых вершин треугольника, выглядит так: в соответствующих им 1013-угольниках уже покрашено по 1012 вершин, а Петя только что сходил в третий 1013-угольник. Это значит, что уже сделано не менее 2025 ходов, следовательно, игроки разыгрывают последний треугольник — ведь на 2027 ходу Петя заведомо проигрывает. Таким образом, Вася должен не допустить только эту ситуацию. Для этого Васе достаточно сделать так, чтобы за первые 4 хода появились покрашенные вершины во всех трёх 1013-угольниках (тогда вышеописанный сценарий проигрыша Васи будет невозможен): за первый ход Петя и Вася покрасят по вершине в двух из трёх 1013-угольников, за второй ход, если этого не сделает Петя, то Вася всегда может покрасить вершину в третьем.

г) Выиграет второй игрок. В этом пункте можно получать 3-, 4-, 6-, 9-, 12-, 18- и 36-угольники. Однако каждый из таких многоугольников содержит в себе треугольник или квадрат, поэтому треугольник или квадрат появится первым. Следовательно, достаточно следить за треугольниками и квадратами. Заметим, что если треугольник и квадрат имеют общую вершину, то все их вершины — это вершины некоторого правильного 12-угольника, а любой другой треугольник или квадрат, пересекающийся с ними по вершинам, так же относится к этому 12-угольнику. Следовательно, Васе нужно выиграть в каждом из трёх 12-угольников (т.е. оставить проигрышный ход за Петей). Стратегия Васи для 12-угольника такая же, как и для 3039-угольника: он каждым ходом выбирает одну из вершин того треугольника, в который только что сходил Петя. И ему нужно так же не допустить единственной проигрышной ситуации, когда оба варианта хода заканчивают соответствующие квадраты: эта ситуация может произойти лишь после 7-го хода, т.е. при розыгрыше последнего треугольника. Как и в предыдущем пункте, Вася может избежать этого сценария на первых ходах.

Ответ. Во всех пунктах выиграет второй игрок.

9 класс

9.1. *Вовочка выписал все десятизначные числа, которые делятся на* 6 *и в записи которых есть только цифры* 0 *и* 7*. Сколько таких чисел?*

Решение. Поскольку выписанные числа четные, то заканчиваются они нулем, то есть для семерок осталось 9 разрядов. С другой стороны, с нуля начинаться они не могут, поэтому начинаются они все с семерки. При этом каждое выписанное число делится на 3, значит в каждом таком числе количество семерок кратно трем, а раз оно не больше девяти, то оно равно или три, или шесть, или девять (вместе с самой первой).

Посчитаем сколько всего таких чисел. Первая и последняя цифры известны, надо расставить только семерки. Чисел столько же сколько способов выбрать 2 разряда для семерок из 8 оставшихся плюс выбрать 5 разрядов для семерок из 8 оставшихся плюс выбрать 8 разрядов для семерок из 8 оставшихся, то есть $C_8^2 + C_8^5 + C_8^8 = 28 + 56 + 1 = 85$.

Ответ. 85.

9.2. *В шахматном турнире, проходящем по круговой системе в один круг (то есть каждые два участника сыграли по одной партии), участвовало* 10 *человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. По окончании турнира каждый сделал заявление: «Все, кого я победил на этом турнире, — лжецы.» Известно, что единоличным победителем турнира стал рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей могло участвовать в турнире? В шахматах за победу даётся* 1 *очко, за ничью —* $0,5$ *очка, за поражение —* 0 *очков.*

Решение. Из заявлений участников следует, что 1) все рыцари между собой играли вничью; 2) каждый лжец победил хотя бы одного рыцаря. Эти два условия являются также и достаточными для того, чтобы описанная в условии ситуация имела место. Так как победитель был один, он одержал хотя бы одну победу, а так как он — рыцарь, то победил он лжеца, так что лжецов не 0. Побеждённый победителем лжец победил хотя бы одного рыцаря, поэтому в турнире, кроме победителя, был ещё хотя бы один рыцарь. Значит, рыцарей хотя бы два. Докажем, что их могло быть два.

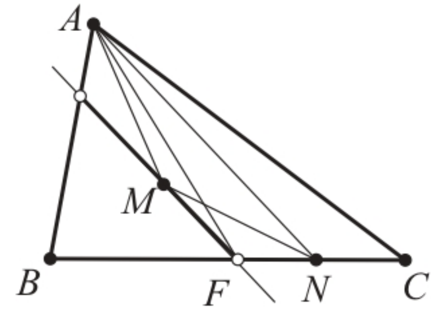
Пусть рыцарей — два, лжецов — восемь, рыцарь–победитель выиграл у всех лжецов, другой рыцарь, рыцарь–неудачник, всем лжецам проиграл, а остальные партии завершились вничью. Тогда разность побед и поражений у победителя равна 8, у неудачника она равна -8, а у всех остальных участников — 0. Все условия выполнены, такой турнир возможен.

Ответ. 2.

9.3. *Дан неравнобедренный треугольник* ABC*. Рассмотрим все такие пары точек* (M, N)*, где* M *лежит внутри треугольника,* N *— на его границе, а ломаная* AMN *делит треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра. Найдите геометрическое место точек* M*.*

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $AB < AC$, Отметим, что в силу неравенства треугольника N лежит на отрезке BC, тогда $P_{AMNB} = AM + MN + NB + BA$, $P_{AMNC} = AM + MN + NC + CA$, следовательно, $AB + BN = AC + CN$, то есть точки A и N

делят замкнутую ломаную ABC на две части равной длины. Тогда точка N определяется однозначно (на самом деле N — точка касания вневписанной окружности со стороной BC, что для решения задачи несущественно).



Пусть F — середина стороны BC. В силу $AB < AC$, точка F лежит между точками N и B. Тогда $S_{ABF} = S_{ACF}$ — свойство медианы делить площадь треугольника пополам. Если бы точки M и N лежали в одной полуплоскости относительно прямой AF, то четырёхугольник $AMNC$ лежал бы строго внутри треугольника ACF, следовательно, имел бы площадь меньшую, чем четырёхугольник $ABNM$, что не так. Значит, точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно AF, и отрезок AF пересекает отрезок MN в некоторой точке D. Из равенств $S_{AMNB} = S_{ABF} + S_{DFN} - S_{ADM}$, $S_{AMNC} = S_{ACF} + S_{ADM} - S_{DFN}$, $S_{ABF} = S_{ACF}$ и $S_{AMNB} = S_{AMNC}$ следует, что $S_{DFN} = S_{ADM} \Leftrightarrow S_{AFN} = S_{AMN}$. Тогда точки M и F лежат на одном и том же расстоянии от прямой AN. Это (с учётом того, что точки M и F лежат по одну сторону от прямой AN) означает параллельность прямых MF и AN.

Верно и обратное. Если лежащая внутри треугольника ABC точка M такова, что $MF \parallel AN$, то четырёхугольник $AMFN$ — трапеция, и, согласно её свойствам, $S_{AMD} = S_{DFN} \Leftrightarrow S_{AMN} = S_{AFN}$, то есть пара точек (M, N) — одна из рассматриваемых пар.

Ответ. лежащая внутри треугольника ABC часть прямой, проходящей через середину BC параллельно прямой, проходящей через вершину A и делящую периметр треугольника пополам.

9.4. *Незнайка нарисовал две параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$ и утверждает, что любая точка параболы $y = x^2 + 1$ равноудалена от обеих парабол $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$. Прав ли Незнайка? Расстоянием от точки до параболы назовём наименьшее из попарных расстояний от этой точки до всевозможных точек параболы.*

Решение. Нет. Если это так, то равноудалена до этих парабол точка $O(1; 0)$ как лежащая на $y = x^2+1$. Вся парабола $y = x^2+2$ не ниже прямой $y = 2$, поэтому расстояние от O до этой параболы не меньше единицы. Значит расстояние от O до параболы $y = x^2$ также не меньше единицы. Но это не так. Возьмем ниже точки O на параболе $y = x^2$ точку, но не вершину, например $(1/2; 1/4)$. Квадрат расстояния от нее до O равен $1/2^2 + 3^2/4^2 = (4+9)/16 = 13/16$, что меньше 1. Следовательно Незнайка не прав.

Ответ. Нет, Незнайка не прав.

9.5. *Пусть задано натуральное число k. Будем говорить, что набор из 4 натуральных чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) k-расивый, если этот набор удовлетворяет равенству*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - kx_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Минимальным назовём k-расивый набор $(a_1, \ldots, a_4)$ с самой маленькой среди всех k-расивых наборов суммой $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и у которого $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4$.

а) *Докажите, что если набор* (a_1, a_2, a_3, a_4) *k-расивый, то* $(ka_2a_3a_4 - a_1, a_2, a_3, a_4)$ *тоже k-расивый.* *(2 балла)*

б) *Докажите, что для всякого минимального k-расивого набора* (a_1, a_2, a_3, a_4) *выполнено* $ka_3a_4 \leqslant 4$. *(4 балла)*

в) *Найдите все минимальные k-расивые наборы при* $k > 2$. *(3 балла)*

г) *Докажите, что если k-расивый набор есть, то имеется и бесконечная серия k-расивых наборов.* *(3 балла)*

д) *Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения* $x_1^2 + x_2^2 + 2 = 4x_1x_2$ *с* $x_1 > 100$. *(2 балла)*

Решение. а) Пусть дано решение уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = kx_1x_2x_3x_4, \qquad (*)$$

некоторый набор (a_1, a_2, a_3, a_4), сопоставим ему многочлен

$$P(x) = x^2 - px + q, \qquad p = ka_2a_3a_4, \qquad q = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2. \qquad (**)$$

Тогда a_1 — его корень по условию. Воспользовавшись теоремой Виета или подставив напрямую, замечаем, что число $p - a_1$ — тоже его корень. Это число вслед за p и a_1 — целое, а в силу теоремы Виета оно положительно, как частное q и a_2. Тогда набор $(p - a_1, a_2, a_3, a_4)$ удовлетворяет $(*)$, а значит — тоже k-красивый.

б) Возьмём минимальный k-расивый набор (a_1, a_2, a_3, a_4). По пункту а) из минимальности следует $a_1 \leqslant p - a_1$, а значит и $a_2 \leqslant a_1 \leqslant p - a_1$. Как показано в доказательстве предыдущего пункта, a_1 и $p - a_1$ — корни многочлена $P(x)$. Тогда этот многочлен отрицателен в точности между этими корнями. Теперь $P(a_2) \geqslant 0$ из $a_2 \leqslant a_1 \leqslant p - a_1$. Это, в силу $a_3 \leqslant a_2$ и $a_4 \leqslant a_2$ дает

$$0 \leqslant P(a_2) = a_2^2 - ka_2^2a_3a_4 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \leqslant a_2^2(4 - ka_3a_4),$$

что означает $ka_3a_4 \leqslant 4$ засчёт положительности a_2.

в) Возьмём минимальный k-расивый набор (a_1, a_2, a_3, a_4). Пусть $k > 4$. Тогда $ka_3a_4 \leqslant 4$ дает $a_3a_4 < 1$, теперь в силу того, что все a_i натуральны, минимальных k-расивых наборов при $k > 4$ нет.

Пусть $2 < k \leqslant 4$. Тогда $ka_3a_4 \leqslant 4$ дает $a_3a_4 < 2$, то есть $a_3 = a_4 = 1$.

Покажем, что и $a_2 = 1$. Действительно, подставляя $a_3 = a_4 = 1$ в $(**)$, получаем $p = ka_2$, $q = a_2^2 + 2$, $P(a_2) = a_2^2 - ka_2^2 + a_2^2 + 2 = a_2^2(2 - k) + 2$. Поскольку $P(a_2) \geqslant 0$ для всех k-расивых наборов, то $a_2^2 \leqslant \frac{2}{k-2} \leqslant 2$, откуда $a_2 = 1$.

Теперь подстановка $a_2 = a_3 = a_4 = 1$ в $(*)$ даёт квадратное уравнение $a_1^2 + 3 = ka_1$. Его дискриминант равен $k^2 - 12$ и может оказаться полным квадратом только при $k = 4$. Решая это уравнение с $k = 4$, находим k-красивый набор $(1, 1, 1, 1)$, минимальность которого тривиальна.

г) Предположим противное и k-красивых наборов конечное число. Тогда найдется k-красивый набор (a_1, a_2, a_3, a_4), у которого сумма $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ максимальна. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$. По пункту а) k-красивым набором является $(ka_2a_3a_4 - a_1, a_2, a_3, a_4)$. По выбору (a_1, a_2, a_3, a_4) имеем $a_1 \geqslant ka_2a_3a_4 - a_1$, то есть $2a_1 \geqslant ka_2a_3a_4$. Умножая обе части на a_1, получаем $2a_1^2 \geqslant ka_1a_2a_3a_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, а в силу $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ и $2a_1^2 \geqslant 4a_1^2$. Поскольку $a_1^2 \geqslant 1$, получили противоречие. Значит, k-красивых наборов бесконечно много.

д) Возьмём $k = 4$, легко проверить, что набор $(1, 1, 1, 1)$ является k-красивым. Отметим, что в пункте а) было доказано, что каждому k-красивому набору $(a_1, a_2, 1, 1)$ можно сопоставить еще один k-красивый набор $(4a_2 - a_1, a_2, 1, 1)$, а в силу симметрии таким будет и $(a_2, 4a_2 - a_1, 1, 1)$. Последовательно применяя это правило получаем:

$$(1, 1, 1, 1) \to (1, 3, 1, 1) \to (3, 11, 1, 1) \to (11, 41, 1, 1) \to (41, 153, 1, 1).$$

Набор $(41, 153, 1, 1)$ k-красивый с $k = 4$, значит $(153, 41, 1, 1)$ такой же и тоже удовлетворяет уравнению $(*)$. Подставляя туда $k = 4, a_3 = a_4 = 1$, получаем требуемое равенство для $a_1 = 153, a_2 = 41$, при этом $153 > 100$.

Ответ. в) $(1, 1, 1, 1)$ при $k = 4$, других минимальных при $k > 3$ нет; д) $a_1 = 153, a_2 = 41$; есть и другие решения, $a_1 = 153, a_2 = 571$, $a_1 = 2131, a_2 = 571$...

Примечание. Рассматриваемое в этой задаче диофантово уравнение — модификация уравнения Маркова для четырех переменных вместо трех. Получение дерева решений самого уравнения Маркова прекрасно разобрано, например, см. Квант, 1985, №4, а то, чем оно полезно (например, комбинаторика слов, квадратичные формы, диофантовы приближения, целочисленная геометрия, теория групп) см. обстоятельно, покороче, или даже в виде глубокомысленнного комментария.

10-11 класс

10-11.1. 20 *игроков играли в пейнтбол. У каждого было по* 7 *шариков с краской. В конце все отстреляли все шарики. В Андрея попали* 10 *раз, а в Вову попало меньше шариков, чем во всех остальных. Насколько много шариков могли попасть в Вову, если ни один шарик не попал в двух и более игроков.*

Решение. Оценка. В 19 игроков, не считая Андрея, было сделано суммарно 130 попаданий. Если в Вову попали 6 или более раз, то в оставшихся 18 игроков попали хотя бы по 7 раз, и суммарное число попаданий было бы не меньше $6+18\cdot 7=132$. Значит в Вову попали не более 5 раз.

Пример. Возьмём кроме Андрея и Вовы ещё двух человек — пусть это Боря и Гоша. Пусть Андрей попал 7 раз в Борю, Боря — 7 раз в Андрея, Вова — 1 раз в Андрея и 6 раз в Гошу, а Гоша — 2 раза в Андрея и 5 раз в Вову. Остальных игроков разобъём на две группы по 8 человек. В этих группах каждый из игроков попал по одному разу в оставшихся 7 игроков в той же группе.

Ответ. 5 раз.

10-11.2. *Дано натуральное число $n>1$. Пусть $1=d_1<d_2<d_3<\ldots<d_k=n$ — все натуральные делители числа n. Оказалось, что $n=(d_2-d_1)(d_3-d_2)\ldots(d_k-d_{k-1})$. Найдите все возможные значения числа n.*

Решение. Если $d_2\neq 2$, то у n все делители нечётны. Однако тогда d_2-d_1 — чётное число, и на него делится n — противоречие. Значит $d_2=2$ и $d_{k-1}=\dfrac{n}{2}$, откуда $(d_2-d_1)(d_k-d_{k-1})=\dfrac{n}{2}$. Это значит, что среди оставшихся пар соседних делителей ровно одна пара отличается на 2, а остальные могут отличаться только на 1 . Рассмотрим случаи.

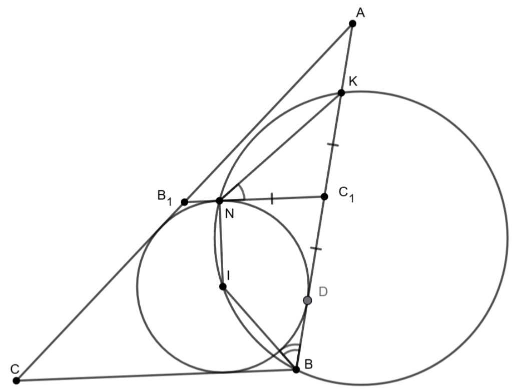
1) Пусть $d_3=4$. Если $d_{k-1}=d_3$, то больше делителей нет и $n=8$. Иначе $d_{k-1}-d_{k-2}=\dfrac{n}{2}-\dfrac{n}{4}=\dfrac{n}{4}=1$, откуда $n=4$. Легко проверить, что это число не подходит.

2) Пусть $d_3=3$. Если $d_{k-1}-d_{k-2}=\dfrac{n}{2}-\dfrac{n}{3}=\dfrac{n}{6}=1$, то $n=6$, что также не подходит. Значит $\dfrac{n}{6}=2$, откуда получаем $n=12$. Это число подходит.

Ответ. $8,12$.

10-11.3. *В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается отрезка B_1C_1 в точке N. Описанная окружность треугольника BIN пересекает вторично сторону AB в точке K. Докажите, что точки C,N,K лежат на одной прямой.*

Решение. Обозначим длины сторон $BC=2a, AC=2b, AB=2c$. Пусть D — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда $BC_1=c, CB_1=b$ и $BD=\dfrac{AB+BC-AC}{2}=a+c-b$ и $C_1D=BC_1-BD=b-a$. Из вписанности окружности в BCB_1C_1 следует, что $B_1C_1+BC=CB_1+BC_1$, откуда $3a=b+c$. Пусть $\angle ABC=2\beta$, тогда из вписанности $BINK$ получаем $\angle KNC_1=180^\circ-\angle ABI-\angle INC_1=90^\circ-\beta$. B_1C_1 — средняя линия ABC, значит $\angle KC_1N = 2\beta$, из чего получаем $\angle NKC_1 = 180^\circ - \angle KC_1N - \angle KNC_1 = 90^\circ - \beta = \angle KNC_1$. Тогда $KC_1 = C_1N$ по доказанной равнобедренности KC_1N и $C_1N = C_1D$ как отрезки касательных. Отсюда $KB = BC_1 + C_1D = b - a + c = 2a = BC$. Треугольники KC_1N и KBC — равнобедренные с общей вершиной и параллельными сторонам, значит точки C, N, K лежат на одной прямой.



10-11.4. *Пусть b_1, b_2, …, b_n ($n > 3$) — конечная возрастающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой — натуральное число. Известно, что все члены этой прогрессии можно разбить на k ($k \geqslant 3$) множеств так, что суммы чисел b_i, попавших в эти множества, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные пары (n, k).*

Решение. Пусть M_1, M_2, …, M_k — суммы чисел в соответствующих множествах, взятые в порядке возрастания. Можно считать, что $b_1 = 1$ (иначе разделим все члены на b_1, при этом любые их суммы также уменьшатся в b_1 раз, поэтому сохранится свойство сумм образовывать арифметическую прогрессию). Пусть $q \in \mathbb{N}$ — знаменатель прогрессии. Заметим, что теперь все её члены, кроме первого, кратны q, а поэтому все M_i, кроме одного (суммы чисел множества, содержащего $b_1 = 1$), также делятся на q нацело. Значит, если $k \geqslant 4$, то есть числа M_i и M_{i+1}, кратные q. Тогда разность арифметической прогрессии тоже кратна q, и все её члены без исключения кратны q. Противоречие. Итак, $k = 3$.

При $q \geqslant 2$ каждый член геометрической прогрессии больше, чем сумма всех её членов с меньшими номерами. Поэтому b_n лежит в кучке с максимальной суммой, с суммой M_3. Так как $M_3 = 2M_2 - M_1 < 2M_2$, $b_n < 2M_2$ и, тем более $b_n < 2(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) = 2 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (напомним, что мы считаем $b_1 = 1$). Имеем неравенство $g^{n-1} < 2 \cdot \dfrac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$, которое равносильно условию $q^n < 3q^{n-1} - 2$. Значит, $q^n < 3q^{n-1}$, откуда $q < 3$. Так как q — натуральное, а прогрессия возрастающая, $q = 2$.

Сумма всех членов прогрессии с одной стороны, равна $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, а с другой $M_1 + M_2 + M_3 = 3M_2$. Так как число M_2 целое, число $2^n - 1$ кратно 3. Это равносильно тому, что число n — чётно.

Покажем, что при всех чётных $n > 3$ прогрессию 1, 2, 4, …, 2^{n-1} можно разложить в три кучки, суммы чисел в которых образуют арифметическую прогрессию. Действительно, в этом случае число $M_2 = \dfrac{2^n - 1}{3}$ — целое. Запишем его в двоичной системе счисления и получим, что оно представляется в виде суммы различных натуральных степеней числа 2 (меньших, чем 2^{n-1}). Именно эти числа и образуют среднее множество. Остальные карточки можно распределить произвольно в две остальные кучки: кучка, в которой окажется число 2^{n_1} будет иметь некоторую сумму $S > M_2$, сумма чисел во второй кучке окажется равной $3M_2 - M_2 - S = 2M_2 - S < M_2$. Осталось заметить, что числа $2M_2 - S$, M_2 и S образуют арифметическую прогрессию с разностью $S - M_2$.

Ответ. $k = 3$, n — любое чётное число, не равное 2.

10-11.5. *В стране n городов и k авиакомпаний ($n > k$). Некоторые города связаны односторонними авиалиниями. Известно, что из каждого города выходит ровно одна авиалиния каждой авиакомпании и в каждый город ведёт ровно одна авиалиния каждой из k компаний. В стране есть Жулик, который летает на самолётах только одной из авиакомпаний (но неизвестно какой), и есть Детектив, который пытается его поймать. Каждый день, рано утром, Детектив один раз может позвонить шерифу одного из n городов и попросить проверить, находится ли преступник в его городе. В случае положительного ответа Жулика ловят. В случае отрицательного ответа вечером того же дня Жулик совершает перелёт из одного города в другой. Из города нельзя перелететь в тот же город.*

а) *Предположим, что Детективу неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Сможет ли он поймать Жулика за конечное число дней?* *(2 балла)*

б) *Детективу всё ещё неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Предположим также, что для любой выбранной компании Жулик сможет за несколько дней попасть из любого города в любой, пользуясь авиалиниями этой компании. За какое наименьшее число вопросов Детектив гарантированно поймает Жулика?* *(2 балла)*

в) *В первый день поиска Жулика, до того, как Детектив успел выбрать город, в который будет звонить, ему принесли карту, на которой указаны все авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Пусть $k = 2$. Докажите, что для поимки Жулика Детективу достаточно $\left[\frac{3n}{2}\right]$ дней.* *(4 балла)*

г) *Верно ли, что существует бесконечно много пар (n, k) натуральных чисел, для которых маршруты авиакомпаний могут быть устроены так, что даже глядя на карту, Детектив не сможет поймать Жулика в течение n дней?* *(6 баллов)*

Решение. а) Из условия следует, что маршруты любой авиакомпании образуют несколько циклов (возможно, один) и Жулик перемещается по одному из этих циклов. Количество городов в каждом цикле не больше чем n. Следовательно, для каждого города верно одно из двух следующих утверждений. 1) Жулик посещает этот город не реже, чем раз в n дней. 2) Жулик никогда не бывает в этом городе. Детектив звонит n дней подряд Шерифу одного из городов и либо ловит Жулика, либо убеждается, что он в этом городе не бывает. Тогда

Детектив звонит n дней подряд Шерифу другого города и. т. д. Не позже, чем через n^2 дней Жулик будет пойман.

б) Из предположения следует, что Жулик в течение n дней точно побывает во всех городах. Значит, действуя, как в пункте «а», Детектив поймает Жулика не позже, чем за эти n дней. Покажем, что более быструю поимку гарантировать нельзя. Можно считать, что каждая компания имеет ровно n самолётов, которые перелетают в следующий город один раз в сутки (вечером). Тогда Жулик постоянно летает одним и тем же самолётом, можно считать, что он из него просто не выходит. Любой звонок Детектива позволяет проверить каждый день ровно по одному самолёту каждой из компаний на наличие в нём Жулика. Поэтому за m звонков ($m < n$) будет проверено не более m самолётов каждой из компании и нельзя быть уверенным, что Жулик не окажется в одном из $k(n-m)$ оставшихся самолётов.

в) Как и в пункте «б» будем считать, что Жулик безвылазно находится в одном из самолётов. Видя карту, Детектив в любой день точно знает, где сейчас находятся непроверенные им самолёты. Он будет звонить Шерифу одного из тех городов, в которых таких непроверенных самолётов возможно больше. Так как компаний две, то в каждом городе всегда ровно два самолёта, поэтому больше двух самолётов в день Детектив проверить не может. Пока непроверенных самолётов в сумме больше, чем n, по принципу Дирихле всегда найдётся город, в котором таких самолётов 2. Значит, в течение $n/2$ дней в случае чётного числа n и в течение $(n+1)/2$ дней в случае нечётного Детектив сможет проверять по 2 самолёта. Возможно, что в дальнейшем ему не удастся проверять по два самолёта в день, поэтому для гарантированной поимки Жулика ему понадобится ещё столько дней, сколько самолётов осталось. При n чётном останется n самолётов, и Детектив потратит ровно $(n/2)+n = (3n)/2$ дней. При n нечётном останется $n-1$ самолёт, и общее количество дней будет равным $(n+1)/2+(n-1) = (3n-1)/2$. Остаётся заметить, что

$$\left[\frac{3n}{2}\right] = \begin{cases} (3n)/2, & \text{если} \quad n = 2m, \\ (3n-1)/2, & \text{если} \quad n = 2m+1. \end{cases}$$

г) Это верно. Например, годятся все пары, где n — чётное число, не меньшее 4, а $k = n-1$. Построим для каждой такой пары схему маршрутов, удовлетворяющих условию задачи, следующим образом. Разобъём города на $n/2$ пар, и пусть маршруты первой компании соединяют города внутри каждой такой пары (один маршрут туда, второй обратно). Теперь разобъём города на пары другим способом, маршруты второй компании пусть соединяют города внутри вновь созданных пар. Разобъём города на пары третьим способом — аналогично определим ммагшруты третьей компании, и так $n-1$ раз. Для корректности процесса нам, конечно, требуется иметь $n-1$ разбиение на пары такие, что каждая из возможных пар городов попадает ровно в одно разбиение. Их можно выбрать так: $n-1$ город мысленно поставить в вершины правильного $(n-1)$-угольника, а один в его центр. Все разбиения имеют такой вид: центральный город O ставится в паре с какой-нибудь вершиной A, остальные города-вершины разбиваются на пары симметричных относительно прямой OA. Итак, маршруты авиакомпаний определены.

Покажем, что Жулик не ловится в течение n дней. Как и раньше, считаем, что Жулик летает одним и тем же самолётом (в нашем примере туда — сюда по каким-то двум городам), а звонок Детектива проверяет все k самолётов, находящихся в городе, в который совершён звонок. Заметим, что если какие-то m рейсов любой из авиакомпаний образуют цикл, то для гарантированной поимки Жулика Детектив обязан позвонить в города этого цикла не менее, чем m раз: каждым звонком Детектив проверяет не более одного самолёта (данной компании), летающего по этому циклу. В частности, отсюда следует, что менее, чем за n дней поймать Жулика не удастся, даже если Детективу будет известна компания, самолётами которой тот летает. Пусть Детектив сделал какие-то $n-3$ звонка, и пока Жулика не вычислил. Тогда найдутся три города, в которые он ещё не звонил — города A, B и C. Тогда про самолёты, летающие внутри треугольника ABC, Детективу пока ничего неизвестно, Жулик может быть в любом из них. Будем считать, что он там и находится. Тогда Детективу нужно за три звонка проверить все 6 рейсов. Без ограничения общности считаем, что следующий звонок сделан в город A и получен отрицательный ответ. На утро следующего дня непроверены 4 самолёта, два из которых сейчас находятся в городе A (один летает по городам A и B, второй — A и C), и по одному в городах B и C. Проверить два из них можно только позвонив в город A. Пусть снова ответ отрицательный. Тогда ясно, что Жулик на одном из двух самолётов, летающих между городами B и C. Так как эти самолёты сейчас разных городах, за один оставшийся звонок детектив проверить оба не сможет.

Ответ. а) сможет; б) за n дней при любом k; г) верно.